

Conjecture de type de Serre et formes compagnons pour GS_{p_4}

F. Herzig, J. Tilouine

8 décembre 2008

Résumé

On présente une conjecture de type de Serre sur la modularité d'une représentation galoisienne modulo p de rang 4 à valeurs dans le groupe symplectique. Nous supposons que la représentation est irréductible et impaire (au sens symplectique). Nous formulons la condition de modularité en utilisant la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham algébrique des variétés de Siegel de niveau premier à p . On se concentre sur le cas où la représentation est ordinaire en p et on donne une liste des poids de Serre correspondante. Lorsque la représentation est modérée, nous conjecturons que chaque poids de cette liste est réalisé, et sinon, nous décrivons un sous-ensemble des poids de la liste qui doivent être réalisés. Nous proposons une construction des classes de cohomologie de de Rham qui réalisent certains de ces poids à l'aide du complexe BGG dual.

Abstract

We present a Serre-type conjecture on the modularity of four-dimensional symplectic mod p Galois representations. We assume that the Galois representation is irreducible and odd (in the symplectic sense). The modularity condition is formulated using the étale and the algebraic de Rham cohomology of Siegel modular varieties of level prime to p . We concentrate on the case when the Galois representation is ordinary at p and we give a corresponding list of Serre weights. When the representation is moreover tamely ramified at p , we conjecture that all weights of this list are modular, otherwise we describe a subset of weights on the list that should be modular. We propose a construction of de Rham cohomology classes using the dual BGG complex, which should realise some of these weights.

1 Introduction

Dans cet article, on présente une conjecture de type de Serre sur la modularité d'une représentation galoisienne modulo p de rang 4 à valeurs dans le groupe symplectique $\bar{\rho} : \Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Nous supposons la représentation irréductible et motiviquement impaire (c'est-à-dire, que $p = 2$ ou bien que les espaces propres pour l'action de la conjugaison complexe pour les deux valeurs propres 1 et -1 sont des plans lagrangiens). Nous proposons une conjecture sur les poids, mais nous n'abordons pas la question des niveaux de la variété de Siegel dans la cohomologie de laquelle $\bar{\rho}$ apparaît.

La question de la modularité d'une telle représentation, au moins lorsque $\bar{\rho}|_{I_p}$ est supposée ordinaire et de Fontaine–Lafaille de poids p -petits, a été posée par l'un des auteurs en 1995 ([30] et Sect. 4 ci-dessous). Dans sa thèse, le premier auteur a formulé pour GL_n/\mathbb{Q} une conjecture de modularité de type de Serre, en donnant la liste complète des poids réguliers possibles lorsque $\bar{\rho}|_{I_p}$ est semi-simple. Le formalisme qu'il a développé est valide pour des groupes réductifs plus généraux. Il produit des systèmes locaux en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels associés à des représentations irréductibles de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ sur les espaces localement symétriques de niveau premier à p dans la cohomologie desquels devraient exister des classes propres pour le système de valeurs propres de Hecke associé à $\bar{\rho}$. Ces systèmes locaux, appelés poids de Serre, remplacent le poids $k(\bar{\rho})$ de la conjecture de Serre [28].

Nous reprenons cette construction dans le cas de GSp_4/\mathbb{Q} et formulons la condition de modularité en utilisant la cohomologie étale et la cohomologie de de Rham algébrique des variétés de Siegel de niveau premier à p . On se concentre sur le cas où $\bar{\rho}$ est ordinaire en p . Dans le cas où $\bar{\rho}|_{I_p}$ est de plus modérément ramifiée, nous explicitons ces poids. En général, notre liste compte vingt éléments. Parmi ceux-ci, huit ont une interprétation en termes de formes compagnons (p -ordinaires). Ils correspondent de manière naturelle à des twists de $\bar{\rho}$ par des puissances convenables du caractère cyclotomique modulo p comme pour les formes compagnons dans la conjecture de Serre [14]. Quant aux douze autres poids on peut au moins exhiber, dans le cas où la restriction $\bar{\rho}|_{D_p}$ à tout le groupe de décomposition est totalement décomposée, des relèvements cristallins avec les poids de Hodge–Tate correspondants (voir la proposition 4.17 ci-dessous).

Par ailleurs, lorsque $\bar{\rho}$ est p -ordinaire non nécessairement modérée, d'exposants $i_0 = 0 \leq i_1 < i_2 \leq i_3 < p - 1$, nous conjecturons l'existence d'une forme cuspidale holomorphe propre p -ordinaire de poids (k, ℓ) pour $\ell = i_1 + 2$ et $k = i_2 + 1$, de niveau premier à p et de représentation galoisienne résiduelle $\bar{\rho}$. Sous des hypothèses de décomposabilité partielle de $\bar{\rho}|_{I_p}$, il y a trois twists

de $\bar{\rho}$ pour lesquelles nous conjecturons qu'ils sont associés à des formes cuspidales cohomologiques (holomorphes ou de Whittaker) de niveau premier à p . Il y a quatre autres twists de $\bar{\rho}$ pour lesquelles nous conjecturons qu'ils sont associés, au moins, à des formes p -adiques.

Comme on le décrira avec plus de détails dans la section 5, les quatre premiers twists correspondent de manière naturelle aux représentants de Kostant dans le groupe de Weyl de $GS p_4$ modulo le groupe de Weyl du sous-groupe de Levi du parabolique de Siegel. Dans un travail récent, le deuxième auteur est arrivé à démontrer l'existence d'une telle forme cuspidale holomorphe dans le premier cas non-trivial, sous certaines hypothèses globales. La méthode consiste à généraliser le travail de Faltings–Jordan en utilisant le complexe BGG dual (introduit par [10], et étudié dans [25] et [27]). Il se peut que les deux autres cas non-triviaux puissent se démontrer avec la même méthode, mais avec des difficultés techniques supplémentaires.

Le lien entre l'existence d'une forme cuspidale et celle d'un poids de Serre pour $\bar{\rho}$ est subtile parce que, d'une part, il pourrait y avoir de la torsion dans la cohomologie de la variété de Shimura localisée en l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke correspondant à $\bar{\rho}$, et d'autre part, parce que la réduction modulo p du système des coefficients associé au poids classique (k, ℓ) est réductible en général et donc n'est pas reliée à un seul poids de Serre.

Notons que [36] étudie une question préalable à des généralisations ultérieures de la conjecture de type de Serre : étant donné H réductif sur \mathbb{Q}_p et $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow H(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ un homomorphisme « géométrique », quel est le meilleur groupe réductif G/\mathbb{Q} sur lequel chercher une représentation automorphe π et une représentation $r : {}^L G \rightarrow H$ telles que $\rho = r \circ \rho_\pi$ (ρ_π associée à π par la correspondance de Langlands). Par exemple, pour nous si $H = GS p_4$, la réponse est $G = GS p_4$ et $r = \text{spin}$.

Remarquons aussi que Toby Gee est en train de formuler une conjecture de type de Serre différente, prédisant les poids de Serre de $\bar{\rho}$ en termes d'existence des relèvements cristallins locaux, qui s'appliquera en particulier au groupe $GS p_{4/\mathbb{Q}}$ (voir la remarque 4.18(ii)).

Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2 on introduira les notations liées au groupe $GS p_4$ et on discutera la condition d'ordinarité dans la section 3. Puis on énonce les conjectures 0 et 1 dans la section 4, donne une explication de la liste des poids et décrit les relèvements cristallins correspondants dans le cas totalement décomposé. Ensuite on étudie dans la section 5 en détail les twists de $\bar{\rho}$ qui correspondent à des formes compagnons et énonce les conjectures correspondants. Finalement, en section 6 on esquisse la méthode, utilisant le complexe BGG dual, qui donne une forme compagnon dans le pre-

mier cas et on remarque comme il se devrait généraliser pour les autres deux cas.

Remerciements : Le premier auteur tiens à remercier Matthew Emerton et Toby Gee pour des discussions utiles, ainsi que l'I.H.É.S. et l'Université de Paris 7 où une partie de ce travail a été réalisée. Le second auteur remercie Kyoto University, Columbia University et l'Academia Sinica de Taipei où une partie de ce travail a été réalisée, pour leur hospitalité.

2 Notations

Soit (V, ψ) un \mathbb{Z} -module symplectique unimodulaire de rang 4, de base (e_1, e_2, e_3, e_4) avec $\psi(e_1, e_4) = \psi(e_2, e_3) = 1$ et $\psi(e_i, e_j) = 0$ si $i \leq j$ autres que $(1, 4)$ et $(2, 3)$. La matrice de ψ dans cette base est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $G = GSp_4(V, \psi) = \{X \in GL_4 : {}^tXJX = \nu \cdot J\}$ le schéma en groupes réductif connexe sur \mathbb{Z} des similitudes de (V, ψ) . Le facteur de similitude ν définit un caractère $\nu : G \rightarrow \mathbb{G}_m$; son noyau est le \mathbb{Z} -schéma en groupes Sp_4 .

Soit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $s' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $B = TN$, resp. $Q = MU$, $P = M_1U_1$ les décompositions de Levi standard du sous-groupe de Borel B de G stabilisateur du drapeau $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle$, du parabolique de Siegel Q stabilisateur du plan isotrope $\langle e_1, e_2 \rangle$, resp. du parabolique de Klingen p stabilisateur de la droite $\langle e_1 \rangle$. On a

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \cdot t_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \cdot t_1^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cap G,$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} \cap G,$$

$$\begin{aligned}
M &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}; {}^tAsDs = \nu \cdot 1_2 \right\}, \\
U &= \left\{ \begin{pmatrix} 1_2 & C \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}; sCs \text{ symétrique} \right\}, \\
P &= \left\{ \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in GL_2 \right\} \cap G.
\end{aligned}$$

Notons que dans cette notation certaines étoiles (resp. certains zéros) représentent des matrices 1×2 ou 2×1 . De même, avec ces notations, on a

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in GL_2 \right\}, \\
U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & * \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Soit $W_G = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T) . Son action sur le groupe des caractères est donnée par $w \cdot \lambda(t) = \lambda(w^{-1}tw)$. Il est engendré par (les classes de) $s_0 = \begin{pmatrix} s & 0_2 \\ 0_2 & s \end{pmatrix}$ et $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il admet la présentation :

$$W_G = \langle s_0, s_1; s_0^2, s_1^2, (s_0 s_1)^4 \rangle.$$

Le groupe de Weyl W_M de M est engendré par s_0 . On a un système de représentants de Kostant de $W_M \backslash W_G$ donné par $W^M = \{1_4, s_1, s_1 s_0, s_1 s_0 s_1\}$.

Soit $X(T)$ (resp. $Y(T)$) le groupe des caractères (resp. cocaractères) de T . On identifie $X(T)$ au réseau de \mathbb{Z}^3 des triplets $(a, b; c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $c \equiv a + b \pmod{2}$ par la formule

$$\lambda : t = \text{diag}(t_1, t_2, \nu t_2^{-1}, \nu t_1^{-1}) \mapsto t_1^a t_2^b \nu^{(c-a-b)/2}.$$

Notons qu'on a alors $\lambda(\text{diag}(z, z, z, z)) = z^c$. Avec ces notations, notre choix des racines simples de G est $\alpha_0 = (1, -1; 0)$ et $\alpha_1 = (0, 2; 0)$; α_0 est la racine courte. De plus, le facteur de similitude $\nu : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ définit le poids de coordonnées $(0, 0; 2)$. Notons $X(T)_+ = \{(a, b; c) \in X(T) : a \geq b \geq 0\}$ l'ensemble des poids dominants. Les α_i correspondent aux réflexions s_i . L'élément $s_1 s_0$, resp. $s_1 s_0 s_1$, envoie $(a, b; c)$ sur $(b, -a; c)$, resp. sur $(-b, -a; c)$.

Soit $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ le groupe réductif dual de (G, B, T) , déterminé à isomorphisme près. Fixons un isomorphisme entre les données radicielles basées $\psi_0(\widehat{G}) \cong \psi_0(G)^*$. Alors le groupe W_G s'identifie canoniquement au groupe de Weyl $W_{\widehat{G}} = N_{\widehat{G}}(\widehat{T})/\widehat{T}$ de \widehat{G} .

Fixons de plus des épinglages de (G, B, T) et de $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$. Alors l'isomorphisme $\text{spin} : \widehat{G} \cong G$ respecte ces épinglages et induit un certain isomorphisme $\psi_0(\widehat{G}) \cong \psi_0(G)$ sur les données radicielles basées, ce qui le caractérise. On donne une formule explicite pour ce dernier isomorphisme dans la section 4, équation (2). L'isomorphisme spin applique le groupe de Weyl $W_{\widehat{G}}$ isomorphiquement sur $W_G = N_G(T)/T$. Le composé

$$\iota : W_G = W_{\widehat{G}} \xrightarrow{\text{spin}} W_G$$

induit un automorphisme qui échange les deux générateurs s_0 et s_1 . Notons que ceci est compatible avec l'invariance de la présentation de W_G par échange de s_0 et s_1 . Voir [25] pour les détails. Ainsi, via ι , $s_1 s_0$ agit par $(a, b; c) \mapsto (-b, a; c)$, et $s_1 s_0 s_1$ agit par $(a, b; c) \mapsto (-a, b; c)$.

3 Ordinarité

Considérons une représentation cuspidale π de $GS p_4(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est dans la série discrète holomorphe de paramètre de Harish-Chandra $(a+2, b+1; a+b)$ avec $a \geq b \geq 0$; en posant $k = a+3$ et $\ell = b+3$, la construction de Harish-Chandra permet de lui associer des formes modulaires holomorphes de poids (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 3$. On fixe une telle forme.

Soit $\Gamma = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; fixons un nombre premier p et considérons la représentation galoisienne

$$\rho_{\pi, p} = \rho_{f, p} : \Gamma \rightarrow GS p_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

non ramifiée hors de $\text{Ram}(\pi) \cup \{p, \infty\}$ et telle que le polynôme caractéristique du Frobenius arithmétique ϕ_ℓ en $\ell \neq p$, $\ell \notin \text{Ram}(\pi)$ soit le polynôme de Hecke $P_{\pi, \ell}(X)$, c'est-à-dire le polynôme tel que $P_{\pi, \ell}(\ell^{-s})$ soit l'inverse du facteur d'Euler en ℓ de la fonction L spinorielle de π décalée de $\frac{k+\ell-3}{2}$.

L'existence de cette représentation résulte des travaux de R. Taylor [29], Laumon [23] et Weissauer [34], mis à part la symplecticité, qui résulterait de travaux non publiés de Weissauer ou de travaux à paraître de J. Arthur. On la suppose acquise.

Soit \mathcal{H}_q la \mathbb{Z} -algèbre de Hecke sphérique de G en q (c'est le \mathbb{Z} -modules des fonctions à support compact sur $G(\mathbb{Q}_q)$, biinvariantes par $G(\mathbb{Z}_q)$). On note $T_{q,1}$,

$T_{q,2}$, resp. $T_{q,0}$ les générateurs de \mathcal{H}_q associés à $\text{diag}(1, 1, q, q)$, $\text{diag}(1, q, q, q^2)$, resp. $\text{diag}(q, q, q, q)$.

Pour tout premier q où π est non ramifié, on définit les valeurs propres $a_{q,i}$ des opérateurs de Hecke $T_{q,i}$ ($i = 1, 2$).

Définition 3.1. *Supposons que π est non ramifié en p . On dit que π est ordinaire en p (ou p -ordinaire) si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite.*

- $\text{ord}_p(a_{p,1}) = 0$ et $\text{ord}_p(a_{p,2}) = b = \ell - 3$.
- On peut ordonner les racines du polynôme de Hecke

$$P_{\pi,p}(X) = P_{f,p}(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$$

de sorte que $\text{ord}_p(\alpha) = 0$, $\text{ord}_p(\beta) = \ell - 2$, $\text{ord}_p(\gamma) = k - 1$ et $\text{ord}_p(\delta) = k + \ell - 3$.

On dit aussi que la forme f est p -ordinaire.

Remarque 3.2. *Les valuations des racines de $P_{f,p}(X)$ sont deux à deux distinctes par la condition $k \geq \ell \geq 3$. De plus, $a_{p,1} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}}$.*

Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète fini et plat sur \mathbb{Z}_p contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ suffisamment grand pour que ρ soit définie dessus, c'est-à-dire qu'il existe un \mathcal{O} -réseau L stable par ρ . Soit ϖ un paramètre uniformisant de \mathcal{O} , $\kappa = \mathcal{O}/(\varpi)$ et soit $\bar{\rho}_{f,p} : \Gamma \rightarrow GSp_4(\kappa)$ la représentation de Γ sur $L/\varpi L$.

Soit D_p un groupe de décomposition en p dans Γ ; soit $I_p \subset D_p$ son sous-groupe d'inertie. Soit ϵ , resp. ω le caractère cyclotomique p -adique, resp. modulo p . Si π est ordinaire en p ([17], [31]), on a par [33] :

$$\rho_{f,p}|_{D_p} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{k+\ell-3} \text{nr}\left(\frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}\right) & * & * & * \\ & \epsilon^{k-1} \text{nr}\left(\frac{\gamma}{p^{k-1}}\right) & * & * \\ & & \epsilon^{\ell-2} \text{nr}\left(\frac{\beta}{p^{\ell-2}}\right) & * \\ & & & \text{nr}(\alpha) \end{pmatrix}$$

où pour tout $u \in \mathcal{O}^\times$, on note $\text{nr}(u) : D_p \rightarrow \mathcal{O}^\times$ le caractère non-ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur u .

Et donc

$$\rho_{f,p}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \epsilon^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \epsilon^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et aussi

$$\bar{\rho}_{f,p}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 Conjecture de type de Serre pour $GS p_4$

Soit S un ensemble fini de places de \mathbb{Q} contenant p et ∞ . Pour chaque $\ell \in S$, on fixe un sous-groupe d'inertie $I_\ell \subset \Gamma$. Soit κ un corps fini de caractéristique p .

Soit $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow GS p_4(\kappa)$ une représentation S -ramifiée, c'est-à-dire un homomorphisme continu tel que $\bar{\rho}(I_\ell) = 1$ pour tout nombre premier $\ell \notin S$. Supposons que $\bar{\rho}$ soit absolument irréductible. Dans [30], l'un des auteurs a conjecturé que, sous l'hypothèse que $\bar{\rho}$ est modulaire (c'est-à-dire provient d'une forme cuspidale cohomologique π pour $GS p_4(\mathbb{A})$) et que sa restriction à D_p est triangulaire supérieure avec des caractères sur la diagonale deux à deux distincts, il en est de même pour ses déformations de même type (un ordre des caractères de la diagonale étant fixé).

Il a introduit ([30], section 9) une condition nécessaire de modularité pour $\bar{\rho}$, appelée l'imparité motivique : $\bar{\rho}$ est dite motiviquement impaire si $p = 2$ ou $\nu \circ \bar{\rho}(c) = -1$ (pour une conjugaison complexe c) ou, de manière équivalente si

$$\bar{\rho}(c) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la conjugaison ayant lieu dans $GS p_4$.

Il a posé la question suivante (Cours au Tata Institute, 1995, non publié) : si la représentation $\bar{\rho}$ est absolument irréductible, motiviquement impaire et p -ordinaire d'exposants $i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ deux à deux distincts avec $i_3 - i_0 < p - 1$, provient-elle d'une représentation cuspidale de $GS p_4(\mathbb{A})$ avec π_∞ dans la série discrète ?

On peut formuler une conjecture légèrement plus générale et plus précise. Supposons que la représentation $\bar{\rho}$ est p -ordinaire. On a donc à conjugaison près dans GL_4 :

$$\bar{\rho}|_{D_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{i_3 \text{nr}(u_3)} & * & * & * \\ & \omega^{i_2 \text{nr}(u_2)} & * & * \\ & & \omega^{i_1 \text{nr}(u_1)} & * \\ & & & \omega^{i_0 \text{nr}(u_0)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où pour tout $u \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, on note $\text{nr}(u) : D_p \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ le caractère non-ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur u .

Après torsion par une puissance de ω , on peut supposer que les exposants satisfont $i_0 = 0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ et $i_j \leq j(p-2)$ pour $j = 1, 2, 3$. Supposons de plus que $i_0 + i_3 = i_1 + i_2$, ce qui est satisfait si, par exemple, $i_3 < p-1$ ou si la conjugaison (1) a lieu dans GS_{p4} .

Notons que ce choix d'entiers croissants $i_j \in \mathbb{Z}$ n'est pas unique en général, même si on impose $i_j \leq j(p-2)$. Une fois un tel ordre fixé, supposons en outre que $i_1 < i_2$; il existe alors un couple unique d'entiers (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 2$ tel que $i_1 = \ell - 2$ et $i_2 = k - 1$. Si de plus les i_j sont deux à deux distincts, on a même $\ell \geq 3$ de sorte qu'il existe (a, b) avec $a \geq b \geq 0$ tel que $i_1 = b + 1$ et $i_2 = a + 2$, et $k = a + 3$, $\ell = b + 3$.

Nous appellerons (k, ℓ) le poids modulaire du couple $(\bar{\rho}, (i_j)_{j=1,\dots,3})$ constitué de la représentation p -ordinaire $\bar{\rho}$ et de la suite ordonnée $(0, i_1, i_2, i_3)$ des exposants.

Définition 4.1. *On dira que les exposants sont p -petits si après torsion par une puissance de ω , on a $0 = i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 < p-1$.*

Dans ce cas, le couple d'entiers (k, ℓ) satisfait la condition $k + \ell - 3 < p-1$.

Conjecture 0. *Soit $(\bar{\rho}, (i_j)_j)$ un couple constitué d'une représentation irréductible motiviquement impaire et p -ordinaire et d'un ordre des exposants avec $i_0 = 0$, $i_1 < i_2$. Supposons ces exposants p -petits. Soit (k, ℓ) son poids modulaire. Supposons que $\bar{\rho}$ soit de Fontaine–Laffaille en p (de poids dans $[0, p-2]$) ; il existe alors une forme cuspidale holomorphe f de poids (k, ℓ) , p -ordinaire et de niveau premier à p , associée à $\bar{\rho}$, au sens que $\bar{\rho}_{f,p}$ est isomorphe à $\bar{\rho}$.*

Remarque 4.2. 1) *On peut montrer que lorsque les exposants sont deux à deux distincts, la représentation $\bar{\rho}$ est de Fontaine–Laffaille en p de poids dans $[0, p-2]$, en bref $FL^{[0,p-2]}$, si et seulement si les étoiles de la première surdiagonale de $\bar{\rho}|_{D_p}$ sont peu ramifiées au sens de Serre. Cette condition se produit toujours, sauf s'il existe j tel que $i_{j+1} = i_j + 1$ et $u_{j+1} = u_j$. Ainsi la condition $FL^{[0,p-2]}$ est « génériquement satisfaite ».*

2) *Dans tous les cas la condition Fontaine–Laffaille garantie que $\bar{\rho}|_{D_p}$ a un relèvement cristallin de poids de Hodge–Tate i_0, i_1, i_2, i_3 .*

Préambules à la théorie des poids de Serre :

Lorsque $\bar{\rho}$ est de Fontaine–Laffaille en p , la forme f conjecturale intervient dans la cohomologie de de Rham de la variété de Siegel X de niveau premier à p , à coefficients dans le fibré à connexion associé à la représentation V_λ de

GS_{p^4} de plus haut poids $\lambda = (a, b; a + b)$ dans les notations de [10], Chap. VI. Cette remarque est en accord avec la terminologie de [31], par exemple, où l'on dit qu'un poids (k, ℓ) avec $k \geq \ell \geq 3$ est cohomologique.

Par des théorèmes de comparaison classiques, le système de valeurs propres de Hecke de f intervient aussi dans la cohomologie étale $H_{et}^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ du système local associé à la représentation V_λ . Sous certaines hypothèses et avec un choix approprié d'un réseau V_λ sur \mathbb{Z}_p , il en résulte que la réduction modulo p du réseau

$$\text{Im} (H_{et}^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\overline{\mathbb{Z}}_p)) \rightarrow H_{et}^3(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}_p)))$$

contient la contragrédiente $\overline{\rho}^\vee$ de $\overline{\rho}$.

On se propose de donner dans ce qui va suivre une formulation de la question de la modularité cohomologique de $\overline{\rho}$ purement en caractéristique p , sans aborder la question de l'existence d'un relèvement automorphe classique en caractéristique zéro. Il faut cependant *a priori* distinguer la question de l'existence d'une classe de cohomologie de de Rham modulo p ou d'une classe de cohomologie étale à coefficients dans des systèmes locaux en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels, qui représente $\overline{\rho}$. On dit qu'une classe de cohomologie de de Rham c représente $\overline{\rho}$ si elle est propre pour les correspondances de Hecke pour tout $\ell \notin S \cup \{p\}$ premier, et que le polynôme de Hecke $P_{c,\ell}(X)$ est le polynôme caractéristique de l'image du Frobenius (géométrique) par la contragrédiente $\overline{\rho}^\vee$.

La comparaison entre les deux formulations, celle en termes d'une classe de cohomologie de de Rham, et celle en termes d'une classe de cohomologie étale, repose sur la validité du théorème de comparaison étale-cristallin modulo p [9] de Faltings. Les poids permis *a priori* pour ce théorème de comparaison modulo p , sont les (k, ℓ) tels que $k \geq \ell \geq 3$ avec $k + \ell - 3 < p - 1$ qui correspondent, comme on le verra, à des points entiers de l'alcôve fondamentale, alors que la conjecture ci-dessous qui donne les poids de Serre possibles pour une représentation résiduelle $\overline{\rho}$ fait intervenir des poids p -restreints qui peuvent être néanmoins hors de cette alcôve. Pour ces poids, la comparaison modulo p n'est pas valable, à moins que ces classes ne se relèvent en caractéristique nulle car la limitation sur les poids pour le théorème de comparaison disparaît alors.

Le travail récent d'un des auteurs [16], a permis de formuler une conjecture (presque) complète dans le cas de GL_n lorsque la représentation galoisienne résiduelle est modérée en p . Elle est exprimée en termes de classes de cohomologie singulière à coefficients dans des systèmes locaux en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels, et non pas en termes de cohomologie étale, puisqu'il n'y a pas en général d'action de Galois sur la cohomologie des espaces localement symétriques, non algébriques, associés à GL_n .

Dans le cas de $G = GSp_4$, l'objet de la présente section est de spécifier, sous des hypothèses similaires, les systèmes locaux étales en $\overline{\mathbb{F}}_p$ -vectoriels sur la variété de Siegel sur \mathbb{Q} de niveau premier à p dans la cohomologie desquels la contragrédiente $\overline{\rho}^\vee$ intervient. Ces systèmes locaux sont associés à des représentations irréductibles du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qu'on appellera poids de Serre. *A posteriori*, on peut interpréter la question de 1995 comme celle de l'existence de l'une d'entre elles, de plus haut poids $(a, b; a + b)$. Nous donnons ici la liste complète des poids de Serre réguliers (voir déf. 4.6) pour $\overline{\rho}$ p -ordinaire modérée.

Nous commençons en posant la définition suivante.

Définition 4.3. *Un poids de Serre est une représentation irréductible du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, à isomorphisme près.*

Cette notion apparaissait implicitement dans [2] pour GL_2 puis a été utilisée systématiquement dans [1] et [6].

Jusqu'à la prop. 4.11 on considérera G comme groupe sur \mathbb{F}_p . Pour $\lambda \in X(T)$ dominant, le G -module dit de Weyl dual est défini par

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \text{Ind}_{B^-}^G(\overline{\mathbb{F}}_p(\lambda)) \\ &= \{f \in \text{Mor}(G, \mathbb{A}^1) : f(bg) = \lambda(b)f(g) \forall g \in G, b \in B^-\} \end{aligned}$$

où B^- désigne le Borel opposé de B . Le plus grand G -sous-module semisimple $F(\lambda) := \text{soc}_G W(\lambda)$ est isomorphe au G -module simple de plus haut poids λ [19, II.2.4].

Définition 4.4. *On introduit le sous-ensemble $X_1(T)$ de $X(T)$ des poids p -restreints,*

$$\begin{aligned} X_1(T) &= \{\lambda \in X(T) : 0 \leq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle < p \quad \forall i\} \\ &= \{(a, b, c) \in X(T) : 0 \leq a - b < p, 0 \leq b < p\}, \end{aligned}$$

ainsi que le sous-groupe

$$\begin{aligned} X^0(T) &= \{\lambda \in X(T) : \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \quad \forall i\} \\ &= \{(0, 0, c) : c \in 2\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Comme $G' \cong Sp_4$ est simplement connexe, on a par une généralisation simple d'un théorème classique de Steinberg :

Proposition 4.5 ([20]). *Tout poids de Serre est la restriction aux points \mathbb{F}_p -rationnels d'un G -module simple $F(\lambda)$ avec $\lambda \in X_1(T)$. Si $\lambda, \lambda' \in X_1(T)$ on a $F(\lambda) \cong F(\lambda')$ comme représentation de $G(\mathbb{F}_p)$ si et seulement si $\lambda - \lambda' \in (p - 1)X^0(T)$.*

Définition 4.6. *Un poids de Serre F est dit régulier si $F \cong F(\lambda)$ avec $0 \leq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle < p-1$ pour $i = 1, 2$. On dit de même qu'un tel λ est p -régulier et on note $X_{\text{rég}}(T) \subset X_1(T)$ l'ensemble des poids p -réguliers.*

En particulier, il y a $p^2(p-1)$ poids de Serre dont $(p-1)^3$ sont réguliers.

Soit X le modèle canonique, défini sur \mathbb{Q} , de la tour $(X_K)_K$ des variétés de Shimura pour G dont le niveau K parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $G(\widehat{\mathbb{Z}}) = G(\widehat{\mathbb{Z}}^p) \times G(\mathbb{Z}_p)$ de la forme $K = K^p \times G(\mathbb{Z}_p)$ pour un K^p arbitraire de niveau premier à p . Soit $f : A \rightarrow X$ la variété abélienne universelle principalement polarisée avec structure de niveau premier à p . En fixant un point géométrique \bar{x} de X , on obtient une représentation continue $\phi_{\bar{x}} : \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow GSp(A_{\bar{x}}[p]^\vee) \cong G(\mathbb{F}_p)$ associée au faisceau étale localement constant $R^1 f_* \mathbb{Z}/p$. Pour toute représentation (W, r) de G définie sur \mathbb{F}_p , la composée $r \circ \phi_{\bar{x}}$ fournit par la théorie du π_1 un faisceau étale localement constant W_X sur X .

Définition 4.7. *On dit que $\bar{\rho}$ est modulaire de poids de Serre $F(\lambda)$ si sa contragrédiente $\bar{\rho}^\vee$ intervient comme sous-représentation du Γ -module $H^\bullet(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X)$. On note $\mathcal{W}(\bar{\rho})$ l'ensemble de ces poids de Serre, et $\mathcal{W}_{\text{rég}}(\bar{\rho})$ le sous-ensemble de ceux qui sont réguliers.*

Supposons maintenant que $\bar{\rho}$ soit modérément ramifiée en p . Pour énoncer la conjecture, on va définir une représentation $V(\bar{\rho}|_{I_p})$, de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$, du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$, ainsi qu'un opérateur \mathcal{R} envoyant les poids de Serre vers les poids de Serre réguliers.

Commençons par l'opérateur \mathcal{R} . Soient $\tilde{\rho} = (2, 1; 3) \in X(T)$ la demi-somme des racines positives à translation par $X^0(T)$ près, et $w_0 = (s_0 s_1)^2$ l'élément le plus long de W_G . Si $w \in W_G$ et $\mu \in X(T)$ on note

$$w \cdot \mu = w(\mu + \tilde{\rho}) - \tilde{\rho}.$$

Pour tout $\mu \in X(T)$ on définit $F(\mu)_{\text{rég}}$ de la manière suivante : on choisit $\mu' \in X_{\text{rég}}(T)$ tel que $\mu - \mu' \in (p-1)X(T)$ et on pose $F(\mu)_{\text{rég}} = F(\mu')$. Il est facile de vérifier que c'est indépendant du choix de μ' . Finalement on définit

$$\mathcal{R}(F(\lambda)) := F(w_0 \cdot (\lambda - p\tilde{\rho}))_{\text{rég}}.$$

Passons à $V(\bar{\rho}|_{I_p})$. Dans ce qui suit, on utilisera le groupe dual \widehat{G} (sur \mathbb{F}_p), identifié avec GSp_4 par l'isomorphisme spin (voir p. 6). Pendant les paragraphes suivants on utilisera le langage classique pour les groupes algébriques, donc on écrira G à la place de $G(\overline{\mathbb{F}_p})$, etc. On note Fr le morphisme de Frobenius sur G ou \widehat{G} . On a une dualité entre les couples (\mathbb{T}, θ) constitués d'un tore

maximal rationnel $\mathbb{T} \subset G$ et d'un caractère $\theta : \mathbb{T}^{\text{Fr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ et les couples $(\widehat{\mathbb{T}}, \sigma)$ constitués d'un tore maximal rationnel $\widehat{\mathbb{T}} \subset \widehat{G}$ et d'un élément $\sigma \in \widehat{\mathbb{T}}^{\text{Fr}}$. De tels couples en dualité sont dits *maximalement déployés* si le rang rationnel de $\widehat{\mathbb{T}}$ est maximal parmi tous les tores maximaux rationnels de \widehat{G} qui contiennent σ [7, §5].

L'application V est alors définie par le diagramme suivant [16, §6.4] (utilisant que $Z(G) \cong \mathbb{G}_m$ est connexe). Ici l'action de \widehat{G}^{Fr} , resp. de G^{Fr} , est donnée par conjugaison. Les bijections verticale à gauche et horizontale en bas dépendent du choix d'un générateur du groupe d'inertie modéré I_p^{mod} , mais l'application V est indépendante de ce choix. La représentation $R_{\mathbb{T}}^\theta$ associée à un couple (\mathbb{T}, θ) est celle définie par Deligne–Lusztig [7].

$$\begin{array}{ccc} \cong \setminus \left\{ \tau : I_p \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{F}}_p) \text{ modérées} \right. & \xrightarrow{-V_-} & \left\{ \text{représentations virtuelles} \right. \\ & & \left. \text{de } G^{\text{Fr}} \text{ sur } \overline{\mathbb{Q}}_p \right\} / \cong \\ & \updownarrow & \uparrow R_{\mathbb{T}}^\theta \\ \widehat{G}^{\text{Fr}} \setminus \left\{ \text{couples } (\widehat{\mathbb{T}}, \sigma), \sigma \in \widehat{\mathbb{T}}^{\text{Fr}} \right. & \xrightarrow{\text{dualité}} & \left\{ \text{couples } (\mathbb{T}, \theta), \theta : \mathbb{T}^{\text{Fr}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \right. \\ & & \left. \text{max. déployés} \right\} / G^{\text{Fr}} \end{array}$$

Remarquons que $(-1)^{3-\text{rg}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{T}} V(\tau)$ est toujours une représentation effective [7, 10.10]. De plus, en utilisant la preuve de [7, 10.10], on peut vérifier que c'est l'induite d'un caractère de $B(\mathbb{F}_p)$, resp. l'induite parabolique d'une représentation cuspidale de $M(\mathbb{F}_p)$, resp. l'induite parabolique d'une représentation cuspidale de $M_1(\mathbb{F}_p)$, resp. une représentation cuspidale de $G(\mathbb{F}_p)$ (il y en a deux familles) selon la classe de \mathbb{T} sous l'action de G^{Fr} par conjugaison.

Pour $\overline{\rho}$ modérément ramifiée en p posons

$$\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p}) = \mathcal{R}(JH(\overline{V(\overline{\rho}|_{I_p})})).$$

Conjecture 1. *Soit $\overline{\rho} : \Gamma \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation irréductible et motiviquement impaire. Alors,*

(i) *l'ensemble $\mathcal{W}(\overline{\rho})$ des poids de Serre de $\overline{\rho}$ est non-vide et son sous-ensemble $\mathcal{W}_{\text{rég}}(\overline{\rho})$ des poids réguliers est contenu dans $\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p}^{ss})$,*

(ii) *si de plus $\overline{\rho}$ est modérément ramifiée en p , on a*

$$\mathcal{W}_{\text{rég}}(\overline{\rho}) = \mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p}).$$

Remarque 4.8. *La détermination des poids de Serre irréguliers semble pour le moment hors d'atteinte. On s'attend néanmoins à ce que dans le cas où $\overline{\rho}|_{I_p}$ est modérée et générique, $\mathcal{W}(\overline{\rho})$ ne contienne aucun poids irrégulier.*

Remarque 4.9. *L'inclusion prédite dans la partie (i) de la conjecture est analogue à la propriété de $W_{\mathbf{p}}(\rho)$ dans la conjecture de Buzzard–Diamond–Jarvis pour les représentations de degré deux d'un corps totalement réel [6, §3.2].*

Remarque 4.10. *Cette conjecture ne nécessite pas la condition de p -ordinarité de $\bar{\rho}|_{I_p}$. Cependant dans la détermination explicite qui suit de l'ensemble $\mathcal{W}^?(\bar{\rho}|_{I_p})$, on se limitera au cas p -ordinaire. Désormais, on suppose donc que $\bar{\rho}$ est p -ordinaire.*

Pour cette détermination, la notion d'alcôve [19, II.6] sera essentielle. On note C_i ($0 \leq i \leq 3$) l'ensemble des $(x, y; z) - \bar{\rho} \in X(T) \otimes \mathbb{R}$ tel que, respectivement,

$$\begin{aligned} C_0 : x > y > 0, \ x + y < p, \\ C_1 : x + y > p, \ y < x < p, \\ C_2 : x - y < p < x, \ x + y < 2p, \\ C_3 : y < p, \ x + y > 2p, \ x - y < p. \end{aligned}$$

Ce sont les seules alcôves pertinentes ici car $X_1(T) = X(T)_+ \cap \cup_{i=0}^3 \overline{C}_i$.

Si $\mu \in X(T) \cong Y(\widehat{T})$, on notera $\bar{\mu} \in Y(GSp_4)$ le copoids qui correspond à μ par l'isomorphisme spin. Rappelons que si $\mu = (a, b; c) \in X(T)$, alors $\bar{\mu}$ est donné par

$$\bar{\mu} : t \mapsto \begin{pmatrix} t^{(a+b+c)/2} & & & \\ & t^{(a-b+c)/2} & & \\ & & t^{(-a+b+c)/2} & \\ & & & t^{(-a-b+c)/2} \end{pmatrix} \in Y(GSp_4). \quad (2)$$

Pour $\mu \in X(T)$ définissons alors la représentation modérée du groupe d'inertie,

$$\tau(1, \mu) = \bar{\mu} \circ \omega : I_p \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

où le « 1 » signifie qu'il s'agit d'une somme directe des puissances du caractère fondamental de niveau un.

Soit $\bar{\rho} : \Gamma \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ une représentation p -ordinaire et modérée, il est facile de voir qu'il existe $\mu \in X(T)$ tel que $\bar{\rho}|_{I_p} \cong \tau(1, \mu)$.

Pour la définition de l'ordre partiel \uparrow sur $X(T)$, qui est plus grossier que \leq , on renvoie à [19, §II.6]. Mais dans tous cet article il suffit de savoir que la restriction de \uparrow aux poids $\cup \overline{C}_i \cap X(T)$ est l'ordre partiel minimal satisfaisant la condition suivante. Pour chaque $\lambda \in \overline{C}_i \cap X(T)$ ($i = 0, 1, 2$) et r_i la réflexion affine par rapport au mur entre les alcôves C_i et C_{i+1} , on a $\lambda \uparrow r_i(\lambda)$. En particulier, pour n'importe quels $0 \leq i \leq j \leq 3$ et pour chaque $\lambda \in \overline{C}_i \cap X(T)$ il existe un unique poids $\lambda' \in \overline{C}_j \cap X(T)$ tel que $\lambda \uparrow \lambda'$.

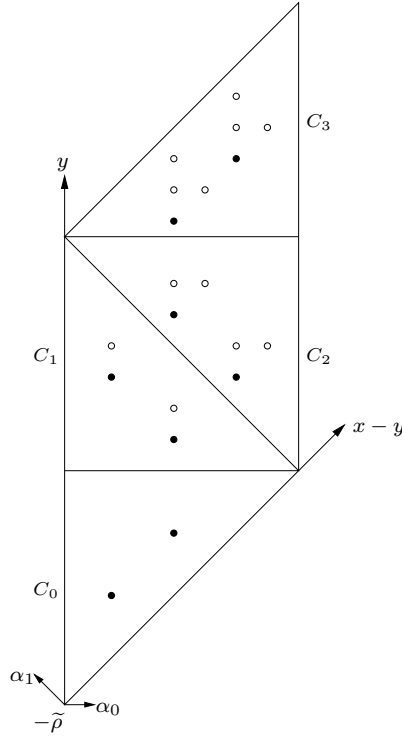


FIG. 1 – Les vingt poids prédits (situation générique)

Proposition 4.11. Soit $\tau = \tau(1, \mu)$ une représentation de I_p comme ci-dessus. Alors

- on a $V(\tau) \cong \text{Ind}_{B(\mathbb{F}_p)}^{G(\mathbb{F}_p)}(\tilde{\mu}|_{T(\mathbb{F}_p)})$ où $\tilde{\mu} : T(\mathbb{F}_p) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ est le relèvement de Teichmüller de $\mu : T(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$,
- et l'ensemble $\mathcal{W}^?(\tau)$ est donné par

$$\mathcal{W}^?(\tau) = \{F(\nu) : \nu \in X_{\text{rég}}(T), \\ \exists \nu' \uparrow \nu, \nu' + \tilde{\rho} \text{ dominant et } \tau \cong \tau(1, \nu' + \tilde{\rho})\}. \quad (3)$$

Remarque 4.12. Dans la figure 1, on a indiqué les plus hauts poids $\nu \in X(T)$ des poids de Serre $F(\nu)$ prédits pour τ générique (comparer avec cor. 4.15). Les points noirs correspondent aux cas $\nu = \nu'$ dans (3), et les points blancs aux autres cas.

Remarque 4.13. L'analogie de ce résultat est valable pour n'importe quelle représentation τ modérée et générique qui admet un prolongement à D_p (voir [16], prop. 6.26).

Démonstration. Le couple (\mathbb{T}, θ) associé à τ est $(T, \tilde{\mu}|_{T(\mathbb{F}_p)})$ par définition [16, §6.4]. Comme $T \subset B$ on obtient $V(\tau) \cong \text{Ind}_{B(\mathbb{F}_p)}^{G(\mathbb{F}_p)}(\tilde{\mu}|_{T(\mathbb{F}_p)})$ [7, 8.2].

On va utiliser la formule de Jantzen pour calculer $JH(\overline{V(\tau)})$ [20, 4.8] (rap-
pelée dans [16, §5.1]). Par un calcul élémentaire on détermine d'abord les
constantes $\gamma'_{w_1, w_2} \in \mathbb{Z}[X(T)]^{W_G}$ qui interviennent dans la formule et on vérifie
qu'elles sont contenues dans $X^0(T)$ si $w_1 = w_2$ ou $(w_1, w_2) \in \{(\pi, s_1 s_0 \pi), (s_1 s_0 s_1 \pi, s_1 \pi) :$
 $\pi \in \langle s_0 s_1 s_0 \rangle\}$ et sont nulles dans les autres cas. Rappelons que la définition de
 $W(\lambda)$, considéré comme élément du groupe de Grothendieck des représentations
de G , s'étend à tout $\lambda \in X(T)$ (pas nécessairement dominant) [19, II.5.7]. Si
 $\mu = (x, y; z)$, on obtient alors que $\overline{V(\tau)}$ est égale à

$$\begin{aligned}
& W(2(p-1) - x, p-1 - y; z) + W(x + p-1, p-1 - y; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{3,A}} \quad \quad \quad =_{W_{3,B}} \\
& + W(y + p-1, x; z) \quad \quad \quad + W(y + p-1, p-1 - x; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{2,A}} \quad \quad \quad =_{W_{2,B}} \\
& + W(p-1 - y, x; z) \quad \quad \quad + W(p-1 - y, p-1 - x; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{1,A}} \quad \quad \quad =_{W_{1,B}} \\
& + W(p-1 - x, y; z) \quad \quad \quad + W(x, y; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{0,A}} \quad \quad \quad =_{W_{0,B}} \\
& + W(p-2 - y, x-1; z) \quad \quad \quad + W(p-2 - y, p-2 - x; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{1,A'}} \quad \quad \quad =_{W_{1,B'}} \\
& + W(p-3 - x, y; z) \quad \quad \quad + W(x-2, y; z) \\
& \quad \quad \quad =_{W_{0,A'}} \quad \quad \quad =_{W_{0,B'}}
\end{aligned}$$

dans le groupe de Grothendieck des représentations de G sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ (on a donné
un nom à chaque terme pour simplifier les notations dans ce qui suit).

Pour décomposer ces modules de Weyl on utilise les formules suivantes.
Puisque

$$W(w \cdot \lambda) = \text{sgn}(w)W(\lambda) \quad \forall w \in W_G \quad (4)$$

[19, II.5.9(1)] on peut se ramener d'abord au cas où λ est dominant et en fait
 p -restreint. Pour un tel poids $\lambda \in X_1(T)$, on a

$$W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_1 s_0 s_1 \cdot \lambda + p(2, 2; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_3, \quad (5)$$

$$W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_0 s_1 s_0 \cdot \lambda + p(2, 0; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_2, \quad (6)$$

$$W(\lambda) = F(\lambda) + F(s_1 s_0 s_1 \cdot \lambda + p(1, 1; 0)) \quad \text{si } \lambda \in C_1, \quad (7)$$

$$W(\lambda) = F(\lambda) \quad \text{si } \lambda \in C_0. \quad (8)$$

Remarquons que si $\lambda \in C_i$ avec $1 \leq i \leq 3$, les composants de $W(\lambda)$ sont dans
 C_i et C_{i-1} . Si $\lambda \in X_1(T) \setminus \cup_{i=0}^3 C_i$, $W(\lambda)$ est irréductible sauf si $\langle \lambda + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = p$

et $p/2 < \langle \lambda + \tilde{\rho}, \alpha_1^\vee \rangle < p$, ou $p = 2$ et λ est de la forme $(1, 1; *)$. Dans ces cas exceptionnels $W(\lambda)$ se décompose selon (5) [18, §7]. (Bien que les résultats soient énoncés pour Sp_4 dans cet article de Jantzen, ils sont encore valables pour GSp_4 parce que son groupe dérivé est Sp_4 .)

Nous allons maintenant étudier le membre de droite de l'égalité (3). En utilisant l'équivalence

$$\tau(1, \mu) \cong \tau(1, \mu') \iff \mu' \in W_G \mu + (p-1)X(T), \quad (9)$$

nous pouvons supposer dorénavant que

$$x - y \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \leq (p-1)/2. \quad (10)$$

Observons que pour $G = GSp_4$, pour tout poids ν p -régulier et pour tout poids $\nu' \in X(T)$ tel que $\nu' + \tilde{\rho}$ soit dominant et $\nu' \uparrow \nu$, on a

$$0 \leq \langle \nu' + \tilde{\rho}, \alpha_i^\vee \rangle < p \quad \forall i.$$

(Cette propriété est particulière à la géométrie des alcôves de GSp_4 .) Il résulte donc facilement de (9) que les ν' dans le membre de droite de (3) sont précisément

$$\begin{aligned} \nu'_{0,A} &= (x, y; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{0,B} &= (p-1-x, y; z) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{1,A} &= (p-1-y, p-1-x; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{1,B} &= (p-1-y, x; z) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{2,A} &= (y+p-1, p-1-x; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{2,B} &= (y+p-1, x; z) - \tilde{\rho}, \\ \nu'_{3,A} &= (x+p-1, p-1-y; z) - \tilde{\rho}, & \nu'_{3,B} &= (2p-2-x, p-1-y; z) - \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

à $(p-1)X^0(T)$ près. (Cette liste est valable même si $x = y$ ou $y = 0$.)

Commençons à comparer les deux membres de l'équation (3). On dira qu'un $\nu' \in X(T)$ *explique* une représentation W de $G(\mathbb{F}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ si

$$\{F(\nu) : \nu \in X_{\text{rég}}(T), \nu' \uparrow \nu\} = \mathcal{R}(JH(W)). \quad (11)$$

Alors

$$\nu'_{0,X} \text{ explique } W_{3,X} \oplus W_{1,X'} \quad \text{si } \nu'_{0,X} \in C_0, \quad (12)$$

$$\nu'_{1,X} \text{ explique } W_{2,X} \oplus W_{0,X'} \quad \text{si } \nu'_{1,X} \in C_1, \quad (13)$$

$$\nu'_{2,X} \text{ explique } W_{1,X} \quad \text{si } \nu'_{2,X} \in C_2, \quad (14)$$

$$\nu'_{3,X} \text{ explique } W_{0,X} \quad \text{si } \nu'_{3,X} \in C_3, \quad (15)$$

où « X » signifie soit « A » soit « B ». En particulier, si ces huit conditions sont satisfaites simultanément, la proposition est prouvée. Dans une première étape

on va étendre la preuve aux cas où $\nu'_{i,X} \in \overline{C}_i$ pour chaque $0 \leq i \leq 3$. Avec cette hypothèse, le même raisonnement que précédemment s'applique pourvu que $\langle \nu'_{i,X} + \tilde{\rho}, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0$ pour chaque i, j . Si $\langle \nu'_{1,X} + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = 0$, l'équation (13) n'est plus valable parce qu'un poids de Serre manque à la gauche de l'équation (11); mais ça ne pose pas un problème car c'est $F(\nu'_{3,Y})$ (où « Y » est ou « A » ou « B » mais pas égale à « X »). Un argument similaire s'applique si $\langle \nu'_{0,X} + \tilde{\rho}, \alpha_0^\vee \rangle = 0$, auquel cas il manquent en général deux poids au membre de gauche, ou si $\langle \nu'_{0,X} + \tilde{\rho}, \alpha_1^\vee \rangle = 0$. (Les poids qui manquent au membre de gauche de (11) dans tous ces cas correspondent aux « discontinuités » de \mathcal{R} , i.e., aux poids λ où $w_0 \cdot (\lambda - p\tilde{\rho}) \notin X_{\text{rég}}(T)$; il y a alors toujours un autre ν' qui explique le poids qui manque parce que $\tau(1, -)$ est constant sur $\nu' + \tilde{\rho} + (p-1)X(T)$.)

Remarquons ensuite que (15) est vraie même si $\nu'_{3,X} \in \overline{C}_2$ (même argument que pour $\nu'_{2,X}$).

Il reste à traiter les cas où $x = y$ ou $y = 0$. Si $y = 0$ et $x \neq y$, tout marche comme $\nu'_{2,X} = \nu'_{1,X} \in \overline{C}_1$ et $W_{2,X} = W_{1,X}$.

Si $x = y$ et $0 < y < (p-1)/2$, les équations (12)–(15), sauf (13) quand $X = B$, sont satisfaites. Comme $\nu'_{1,B} = \nu'_{0,B} \in C_0$ et $W_{2,B} = W_{3,B}$ il suffit de montrer que $W_{0,B'}$ ne contribue pas à $\mathcal{R}(JH(\overline{V(\tilde{\rho}|_{I_p})}))$, c'est-à-dire ne change que les multiplicités des composants. Soit $F_{1,B'}$ (resp., $F_{3,A}$) le composant de $W_{1,B'}$ (resp., $W_{3,A}$) avec plus haut poids dans \overline{C}_0 (resp. \overline{C}_2). Alors, en effet, $W_{0,B'} = -F_{1,B'}$ et $\mathcal{R}(F_{1,B'}) = \mathcal{R}(F_{3,A})$. Si $x = y$ et $y = (p-1)/2$, on traite en plus le cas (13) pour $X = A$ de la même manière.

Supposons finalement que $x = y = 0$. Observons que $\nu'_{2,A} = \nu'_{3,A} = \nu'_{1,A} \in C_1$, $W_{1,A} = W_{0,A} = W_{2,A}$ et $\nu'_{2,B} = \nu'_{1,B} = \nu'_{0,B} \in C_0$, $W_{1,B} = W_{2,B} = W_{3,B}$. Les équations (12), (13) si $X = A$ et (15) si $X = B$ sont satisfaites. Il ne reste qu'à constater que $W_{1,B'} = 0$. On vérifie aisément que l'argument de ce paragraphe est encore valable si $p = 2$ (et c'est l'unique cas qui peut arriver si $p = 2$). \square

Lemma 4.14. *On a*

$$\mathcal{W}^?(\tau \otimes \omega^c) \cong \mathcal{W}^?(\tau) \otimes \nu^c \quad \forall c \in \mathbb{Z},$$

où $\nu : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ est ici le facteur de similitudes de G . De même,

$$\mathcal{W}(\overline{\rho} \otimes \omega^c) \cong \mathcal{W}(\overline{\rho}) \otimes \nu^c \quad \forall c \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour la première assertion, on observe que $\nu|_T = (0, 0; 2) \in X(T) \cong Y(\widehat{T})$ correspond par l'isomorphisme spin au cocaractère central $\zeta : z \mapsto \text{diag}(z, z, z, z)$ de \mathbb{G}_m vers G (voir (2)). Puisque ν et ζ sont invariants par

conjugaison et $R_{\mathbb{T}}^{\theta\tilde{\nu}} \cong R_{\mathbb{T}}^{\theta} \otimes \tilde{\nu}$ [7, 1.27], on a $V(\tau \otimes \omega^c) \cong V(\tau) \otimes \tilde{\nu}^c$. Finalement, on utilise que $\mathcal{R}(F \otimes \nu) \cong \mathcal{R}(F) \otimes \nu$.

Pour la deuxième assertion, rappelons la construction du système local F_X associé à une représentation (F, ρ_F) de $G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit $f : A \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ le schéma abélien universel et soit $\phi_{\bar{x}} : \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \bar{x}) \rightarrow GSp(A_{\bar{x}}[p]^{\vee}) \cong G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la représentation du groupe fondamental de $X \times \mathbb{Q}$ (pour un point géométrique fixé), associée au faisceau étale localement constant $R^1 f_* \mathbb{Z}/p$. Le système local F_X est associé à la représentation $\rho_F \circ \phi_{\bar{x}}$ du groupe fondamental. Soit $\rho_{\bar{x}} : \pi_1(X_{\mathbb{Q}}, \bar{x}) \rightarrow GSp(A_{\bar{x}}[p]) \cong G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la représentation associée au revêtement étale $A[p] \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$ des points de p -torsion. Comme la forme symplectique sur $A_{\bar{x}}[p]$ est donnée par l'accouplement de Weil, on a pour tout $P, Q \in A_{\bar{x}}[p]$: $\langle P^{\sigma}, Q^{\sigma} \rangle = \langle P, Q \rangle^{\nu \circ \rho_{\bar{x}}(\sigma)} = \langle P, Q \rangle^{\omega(\sigma)}$. On trouve donc $\nu \circ \rho_{\bar{x}} = \omega$ ce qui implique $\nu \circ \phi_{\bar{x}} = \omega^{-1}$. Il s'ensuit que

$$H^*(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X \otimes \nu_X^c) = H^*(X \times \overline{\mathbb{Q}}, F(\lambda)_X) \otimes \omega^{-c}.$$

Le résultat en découle. \square

La preuve de la proposition 4.11 donne le corollaire suivant, qui fournit une description explicite de $\mathcal{W}^?(\tau)$ dans la plupart des cas, à torsion près.

Corollaire 4.15. *Supposons que $\tau : I_p \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est donnée par*

$$\tau \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \tau(1, (x, y; x+y)),$$

où $k > \ell > 3$, $k + \ell < p + 1$ et $x = k - 1$, $y = \ell - 2$. Alors $\mathcal{W}^?(\tau)$ consiste en les 20 poids de Serre $F(\nu)$ avec $\nu + \tilde{\rho} \in X_{\text{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ parcourant :

C_0	$(x, y; x+y),$	$(p-1-x, y; x+y),$
C_1	$(p-1-y, p-1-x; x+y),$	$(p-1-y, x; x+y),$
$C_0 \rightarrow C_1$	$(p-y, p-x; x+y),$	$(p-y, x+1; x+y),$
C_2	$(y+p-1, p-1-x; x+y),$	$(y+p-1, x; x+y),$
$C_1 \rightarrow C_2$	$(y+p+1, p-1-x; x+y),$	$(y+p+1, x; x+y),$
$C_0 \rightarrow C_2$	$(y+p, p-x; x+y),$	$(y+p, x+1; x+y),$
C_3	$(x+p-1, p-1-y; x+y),$	$(2p-2-x, p-1-y; x+y),$
$C_2 \rightarrow C_3$	$(x+p+1, p+1-y; x+y),$	$(2p-x, p+1-y; x+y),$
$C_1 \rightarrow C_3$	$(x+p+1, p-1-y; x+y),$	$(2p-x, p-1-y; x+y),$
$C_0 \rightarrow C_3$	$(x+p, p-y; x+y),$	$(2p-1-x, p-y; x+y).$

Ici la notation « $C_j \rightarrow C_i$ » pour $j < i$, resp. « C_i », veut dire que les ν correspondants sont situés dans l'alcôve C_i et qu'ils sont obtenus en commençant par un $\nu' \in C_j$, resp. par $\nu' = \nu$, dans la description de $\mathcal{W}^?(\tau)$ de la prop. 4.11. Il y a une seule exception : si $k - \ell = 1$ ou $k + \ell = p$, un ν de la rangée « C_3 » se trouve sur la frontière entre C_2 et C_3 .

Remarque 4.16. Supposons que $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,p}$ avec f de poids (k, ℓ) et $k > \ell > 3$ et $k + \ell < p + 1$ telle que $\bar{\rho}|_{I_p}$ est p -ordinaire modérée. Notons $\lambda = (a, b; a + b) = (x, y; x + y) - \tilde{\rho}$ le « poids fondamental ». Alors les huit poids ν des rangées « C_i » se répartissent en deux sous-ensembles. Le premier est le sous-ensemble des poids p -réguliers parmi $w \cdot \lambda + \mathbb{Z}(p - 1, p - 1)$ où $w \in W^M$ parcourt l'ensemble des représentants de Kostant dans W_G , et le second est le sous-ensemble des poids p -réguliers parmi $w \cdot \lambda + \mathbb{Z}(p - 1, 0)$ pour $w \in W_G \setminus W^M$. Les poids de Serre correspondants s'appellent les poids compagnons de f (ou de son poids fondamental).

Remarquons que sous la condition plus faible $k \geq \ell \geq 3$ et $k + \ell - 3 < p - 1$, qui provient de la théorie de Fontaine–Laffaille, on a toujours ces huit poids compagnons du poids fondamental. Ils sont tous p -restreints mais peuvent se situer sur des murs ou sur des alcôves contiguës à celles de la liste ci-dessus. On y reviendra dans la prochaine section.

En ce qui concerne les douze poids dans les rangées « $C_j \rightarrow C_i$ », on peut justifier leur présence dans la liste par la proposition suivante. On dira qu'une représentation $\rho_p : D_p \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est cristalline à poids de Hodge–Tate $\xi \in Y(T)$ si $j \circ \rho_p$ est cristalline à poids de Hodge–Tate $j \circ \xi$ (qui s'identifie à un multiensemble de quatre entiers), où $j : GSp_4 \hookrightarrow GL_4$ est l'inclusion canonique.

Proposition 4.17. Supposons que la représentation locale $\bar{\rho}_p : D_p \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est totalement décomposée. Alors pour chaque $\mu \in X_{\text{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ tel que $F(\mu - \tilde{\rho}) \in \mathcal{W}^?(\bar{\rho}_p|_{I_p})$ il existe une représentation cristalline $\rho_p : D_p \rightarrow GSp_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ à poids de Hodge–Tate $\bar{\mu} \in Y(T)$ qui relève $\bar{\rho}_p$.

Remarque 4.18.

(i) Cet énoncé fournit un indice de nature locale pour l'existence pour chaque poids $\mu \in \mathcal{W}^?(\bar{\rho}_p|_{I_p})$, d'une représentation automorphe cuspidale π telle que l'on ait (globalement) : $\bar{\rho}_\pi = \bar{\rho}$. En effet, la représentation galoisienne associée à une représentation cuspidale cohomologique de poids $\mu - \tilde{\rho}$ (donc dont la composante à l'infini est de paramètre de Harish–Chandra $\mu + (0, 0; 3)$) et de niveau premier à p est cristalline de poids de Hodge–Tate $\bar{\mu}$.

(ii) Cette proposition est compatible avec la conjectures de Buzzard–Diamond–Jarvis [6] pour GL_2/F . L'analogie de la proposition pour GL_n/\mathbb{Q} est prédit par

une conjecture de Gee [12, §4.3] même sans supposer que $\bar{\rho}|_{I_p}$ est modérée est que le poids de Serre est régulier. Il est en train d'étendre sa conjecture (au moins) aux groupes réductifs connexes et déployés dont le groupe dérivé est simplement connexe sur un corps de nombres arbitraire.

Démonstration. Pour $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p^\times$ notons $\text{nr}(\alpha)$ le caractère non-ramifié de D_p à valeur α sur un élément de Frobenius. Notons aussi $\tilde{\alpha}$ le relèvement de Teichmüller de α .

La représentation $\bar{\rho}_p$ étant totalement décomposée, il existe des entiers $x \geq y \geq 0$ et z avec $x + y \leq p - 1$ et des $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \bar{\mathbb{F}}_p^\times$ avec $\alpha\delta = \beta\gamma$ tel que

$$\bar{\rho}_p \sim \begin{pmatrix} \omega^{x+y} \text{nr}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^x \text{nr}(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^y \text{nr}(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{nr}(\delta) \end{pmatrix} \otimes \omega^z.$$

(On utilise les équations (9), (10).) Notons d'abord que l'énoncé dépend seulement de μ modulo $(p-1)X^0(T)$, et donc de $F(\mu - \tilde{\rho})$, puisqu'on peut tordre ρ_p par $\epsilon^{n(p-1)}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sans changer sa réduction. Également, après torsion nous pouvons supposer que $z = 0$.

Commençons par exhiber un relèvement cristallin à poids de Hodge–Tate $\bar{\mu}$ pour chaque élément μ de la liste du corollaire (n'importe que la restriction sur (x, y) est plus faible ici). Puis on vérifiera que l'on a obtenu ainsi (au moins) un relèvement pour chaque poids de Serre dans $\mathcal{W}^2(\bar{\rho}_p|_{I_p})$. En fait on peut déduire facilement de la preuve qu'aucun des relèvements que l'on a décrit ne correspond à un poids de Serre régulier qui n'est pas prédit.

Considérons les quatre expressions suivantes pour $\bar{\rho}_p$:

$$\omega^{x+y} \text{nr}(\alpha) \oplus \omega^x \text{nr}(\beta) \oplus \omega^y \text{nr}(\gamma) \oplus \text{nr}(\delta), \quad (16)$$

$$\omega^{p-1} \text{nr}(\delta) \oplus \omega^x \text{nr}(\beta) \oplus \omega^y \text{nr}(\gamma) \oplus \omega^{x+y-p+1} \text{nr}(\alpha), \quad (17)$$

$$\omega^{y+p-1} \text{nr}(\gamma) \oplus \omega^{x+y} \text{nr}(\alpha) \oplus \text{nr}(\delta) \oplus \omega^{x-p+1} \text{nr}(\beta), \quad (18)$$

$$\omega^{x+p-1} \text{nr}(\beta) \oplus \omega^{x+y} \text{nr}(\alpha) \oplus \text{nr}(\delta) \oplus \omega^{y-p+1} \text{nr}(\gamma). \quad (19)$$

Dans chaque cas il y a un relèvement cristallin évident obtenu en remplaçant ω par ϵ et α, \dots, δ par leurs relèvements de Teichmüller. Les poids μ correspondants sont ceux des rangées « C_i » qui sont situés à la gauche.

Regardons l'équation (17). Puisque $2p - 2 - (x + y) \geq p - 1$, le sous-lemme ci-dessous montre qu'il existe une représentation cristalline σ de dimension 2 à poids de Hodge–Tate $\{p, x + y - p\}$ telle que $\bar{\sigma} \sim \omega^{p-1} \text{nr}(\delta) \oplus \omega^{x+y-p+1} \text{nr}(\alpha)$. On obtient donc un relèvement cristallin $\epsilon^x \text{nr}(\tilde{\beta}) \oplus \sigma \oplus \epsilon^{-x} \text{nr}(\tilde{\beta}^{-1}) \det \sigma$ à poids

de Hodge–Tate le multiensemble $\{p, x, y, x + y - p\}$ dont l'image est contenue dans le Levi M_1 du parabolique de Klingen. Le même argument donne un relèvement pour les expressions (18)–(19). Les poids μ correspondants sont ceux des rangées « $C_0 \rightarrow C_i$ » qui sont situés à gauche dans le tableau.

Regardons l'équation (18). Puisque $y + p - 1 \geq p - 1$, le sous-lemme ci-dessous montre qu'il existe une représentation cristalline σ_1 de dimension 2 à poids de Hodge–Tate $\{y + p, -1\}$ telle que $\overline{\sigma}_1 \sim \omega^y \text{nr}(\gamma) \oplus \text{nr}(\delta)$. Posons $\sigma_2 = \epsilon^{x+y} \text{nr}(\tilde{\alpha}\tilde{\delta}) \cdot s \cdot {}^t\sigma_1^{-1} \cdot s$ avec s la 2×2 matrice de la page 4. On obtient donc un relèvement cristallin $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ à poids de Hodge–Tate $\{y+p, x+y+1, -1, x-p\}$ dont l'image est contenue dans le Levi M de Siegel. Le même argument donne un relèvement correspondant à l'expression (19). Les poids μ correspondants sont ceux des rangées « $C_1 \rightarrow C_i$ » qui sont situés à la gauche.

Regardons l'équation (19). Puisque $2p - 2 + x - y \geq 2p - 4$, le sous-lemme ci-dessous montre qu'il existe une représentation cristalline σ de dimension 2 à poids de Hodge–Tate $\{x + p + 1, y - p - 1\}$ telle que $\overline{\sigma} \sim \omega^{x+p-1} \text{nr}(\beta) \oplus \omega^{y-p+1} \text{nr}(\gamma)$. On obtient donc un relèvement cristallin $\epsilon^{x+y} \text{nr}(\tilde{\alpha}) \oplus \sigma \oplus \epsilon^{-x-y} \text{nr}(\tilde{\alpha}^{-1}) \det \sigma$ à poids de Hodge–Tate $\{x + p + 1, x + y, 0, y - p - 1\}$ dont l'image est contenue dans le Levi M_1 du Klingen. Le poids μ correspondant est $(x + p + 1, p + 1 - y; x + y)$, qui est situé dans la rangée « $C_2 \rightarrow C_3$ » à gauche.

Ainsi on a obtenu dix relèvements cristallins qui correspondent aux poids μ à gauche dans le tableau du corollaire. Comme $\overline{\rho}_p$ peut aussi être écrite sous la forme

$$\overline{\rho}_p \sim \begin{pmatrix} \omega^{x'+y'} \text{nr}(\gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{x'} \text{nr}(\delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{y'} \text{nr}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{nr}(\beta) \end{pmatrix} \otimes \omega^{p-1-x'},$$

avec $(x', y') = (p - 1 - x, y)$ satisfaisant les mêmes inégalités que (x, y) , on obtient dix relèvements cristallins correspondant aux poids μ à droite.

Démontrons maintenant que l'on a exhibé suffisamment de relèvements. Par la preuve de la prop. 4.11, les poids de Serre prédits sont précisément les $F(\nu)$ où $\nu'_{i,X} \uparrow \nu$ avec $\nu \in X_{\text{rég}}(T)$. (Les $\nu'_{i,X}$ ont été définis dans la démonstration de cette proposition.) La symétrie $(x, y) \leftrightarrow (x', y')$ permet de nous ramener à un seul $X \in \{A, B\}$ pour chaque $0 \leq i \leq 3$.

Commençons par $i = 0$, et prenons $\nu'_{0,A}$. Comme on a $\nu'_{0,A} \in \overline{C}_0$, les poids $\nu + \tilde{\rho} \in X_{\text{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ pour lesquels $\nu'_{0,A} \uparrow \nu$ sont précisément les poids de $X_{\text{rég}}(T) + \tilde{\rho}$ qui figurent dans les quatre rangées « $C_0 \rightarrow C_i$ » de gauche dans la liste. On a déjà décrit un relèvement cristallin dans chacun de ces cas.

Pour $i = 1$ prenons $\nu'_{1,B}$. Quand $x > y$, on a $\nu'_{1,B} \in \overline{C}_1$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant les poids dans les trois rangées « $C_1 \rightarrow$

C_i) » à droite. Quand $x = y$ on a $\nu'_{1,B} = \nu'_{0,B}$, donc ce cas a déjà été discuté (à cause de la symétrie entre les cas « A » et « B »).

Pour $i = 2$ prenons $\nu'_{2,B}$. Quand $y > 0$, on a $\nu'_{2,B} \in \overline{C}_2$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant les poids des deux rangées « $C_2(\rightarrow C_i)$ » à droite. Quand $y = 0$ on a $\nu'_{2,B} = \nu'_{1,B}$, donc ce cas a déjà été discuté.

Finalement pour $i = 3$ prenons $\nu'_{3,A}$. Quand $x > y + 1$ on a $\nu'_{3,A} \in \overline{C}_3$ et tout marche comme dans le premier cas en utilisant le poids de la rangée « C_3 » à gauche. Quand $x = y + 1$ on est ramené au cas $i = 0$ car $\nu'_{3,A}$ est égale au poids dans la rangée « $C_0 \rightarrow C_2$ » à gauche. Quand $x = y$ on a $\nu'_{3,A} = \nu'_{2,A}$, donc ce cas a déjà été discuté (à cause de la symétrie entre les cas « A » et « B »).

Sous-lemme 4.19. *Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$.*

- (i) *Supposons que $k \geq p+2$. Alors il existe une représentation cristalline de D_p à poids de Hodge–Tate $\{0, k-1\}$ de réduction $\omega^{k-2} \text{nr}(\alpha) \oplus \omega \text{nr}(\beta)$.*
- (ii) *Supposons que $k \geq 2p+3$. Alors il existe une représentation cristalline de D_p à poids de Hodge–Tate $\{0, k-1\}$ de réduction $\omega^{k-3} \text{nr}(\alpha) \oplus \omega^2 \text{nr}(\beta)$.*

Pour démontrer le sous-lemme, fixons d’abord un isomorphisme $\mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit K un corps de nombres quadratique imaginaire qui est déployé en p , et fixons un plongement $K \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $\ell \geq 1$ un entier. Nous commençons par construire une forme CM parabolique f de niveau premier à p et de poids ℓ tel que $\bar{\rho}_f|_{D_p} \sim \epsilon^{\ell-1} \text{nr}(\alpha) \oplus \text{nr}(\beta)$ et $\det \rho_f|_{D_p} = \epsilon^{\ell-1} \text{nr}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})$.

Notons \mathfrak{p} et $\bar{\mathfrak{p}}$ les idéaux premiers divisant p , tel que \mathfrak{p} correspond au plongement $K \rightarrow \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$. Nous obtenons la forme CM en choisissant un caractère de Hecke $\chi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que (a) le conducteur \mathfrak{f} de χ est premier à p , (b) $\chi(z) = z^{\ell-1}$ pour $z \in \mathbb{C} \cong K_\infty$, (c) $\chi(\mathfrak{p})\chi(\bar{\mathfrak{p}})p^{\ell-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ et $\chi(\bar{\mathfrak{p}}) = \beta$, et (d) $\chi \neq \chi \circ c$, où c est l’unique élément non-trivial de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Alors la forme CM associée [24],

$$f(z) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_K \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{f})=1}} \chi(\mathfrak{a}) q^{N(\mathfrak{a})},$$

est la forme cherchée.

On va même construire pour chaque $a, b \in \mu_\infty(\mathbb{C})$ (des racines de l’unité) un caractère χ satisfaisant (a), (b), (d) et (c') $\chi(\mathfrak{p})p^{\ell-1} = a$, $\chi(\bar{\mathfrak{p}}) = b$. En tordant par un caractère satisfaisant (a) et (b) on est réduit au cas $\ell = 1$ (le seul cas d’ailleurs où la condition (d) n’est pas automatique).

Puisqu'il existe des caractères de Dirichlet (c'est-à-dire sur \mathbb{Q}) de conducteur premier à p de n'importe quelle valeur d'ordre fini en p , on peut remplacer la condition (c') par (c'') : $\chi(\mathfrak{p})/\chi(\overline{\mathfrak{p}}) = c := a/b$.

Soit $n \geq 1$ minimal tel que $(\mathfrak{p}/\overline{\mathfrak{p}})^n = x\mathcal{O}_K$ est principale. En considérant les extensions possibles d'un caractère $K^\times \backslash K^\times \widehat{\mathcal{O}_K}^\times K_\infty^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ à $K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times$, on peut remplacer (c'') par (c''') : $\chi(x^{(p)}) = d := c^{-n}$ où on note $x^{(p)} \in \widehat{\mathcal{O}_K}^\times$ l'idèle qui est triviale en p et ∞ et qui coïncide avec x dehors.

Alors il suffit de construire un caractère $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $\eta(x^{(p)}) = d$ et tel que η soit trivial sur l'image de \mathcal{O}_K^\times . En remplaçant d par une 12ème racine de d et en prenant la 12ème puissance de η à la fin, on peut abandonner la condition que $\eta|_{\mathcal{O}_K^\times}$ soit triviale. Sans perte de généralité on peut supposer que l'ordre de d est de la forme q^r où q est premier. Il suffit donc de trouver un idéal \mathfrak{f} premier à p tel que l'ordre de $x^{(p)}$ dans $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times$ est un multiple de q^r . Soit h le nombre de classes de \mathcal{O}_K . On va montrer qu'il existe un entier $i \geq r$ et un idéal \mathfrak{f} premier à p tel que $\mathfrak{f} \nmid x^{hq^{r-1}} - 1$ mais $\mathfrak{f} \mid x^{hq^i} - 1$. Choisissons $\pi \in \mathcal{O}_K$ tel que $\mathfrak{p}^h = \pi\mathcal{O}_K$. Alors il suffit de montrer que les normes des idéaux $(\pi^{hq^i} - \overline{\pi}^{hq^i})\mathcal{O}_K$ (qui sont premiers à p) ne sont pas bornées. C'est un argument élémentaire utilisant que $\pi/\overline{\pi}$ n'est pas une racine de l'unité.

Jusqu'ici on a construit un caractère χ satisfaisant (a), (b) et (c). Il suffit maintenant de construire un caractère χ' satisfaisant (a), (b), (c) et (d) dans le cas $a = b = 1$ (et toujours $\ell = 1$). Comme ci-dessus on réduit à construire un caractère $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que $\eta(x^{(p)}) = 1$ et tel que $\eta \neq \eta \circ c$. Soit $q \nmid 6$ un nombre premier et soient $q_1 \neq q_2$ deux autres nombres premiers tels que $q_i \equiv 1 \pmod{q \operatorname{disc}(K)}$. Alors les q_i sont déployés dans K/\mathbb{Q} . Choisissons $\mathfrak{q}_i \mid q_i$ des idéaux premiers de \mathcal{O}_K et posons $\mathfrak{f} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$. Puisque dans un espace vectoriel de dimension deux pour chaque élément il existe un élément non-trivial de l'espace dual qui l'annule, il existe $\eta : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ d'ordre exactement q tel que $\eta(x^{(p)}) = 1$; évidemment on a $\eta \neq \eta \circ c$.

Cela termine la construction du caractère de Hecke χ et de la forme CM parabolique f associée.

Considérons la forme parabolique \bar{f} sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la réduction de f modulo p . La représentation galoisienne associée $\rho_{\bar{f}}$ est l'induite du caractère galoisien associé à χ , d'où $\rho_{\bar{f}}|_{D_p} \sim \omega^{\ell-1} \oplus 1$. Alors la forme $\overline{g} = \theta \bar{f}$ est propre et parabolique du même niveau, de poids $\ell + p + 1$ et telle que $\rho_{\overline{g}} \sim \rho_{\bar{f}} \otimes \omega$ [14, §4]. Par le lemme de Deligne–Serre, il existe une forme parabolique et propre g en caractéristique nulle du même poids et niveau et tel que $\overline{\rho_g} \sim \rho_{\overline{g}} \sim \omega^\ell \oplus \omega$ (notons que le poids est maintenant au moins deux). Puisque la forme g est de niveau premier à p et de poids $\ell + p + 1$, on sait que $\rho_g|_{D_p}$ est cristalline à

poids de Hodge–Tate $\{\ell + p, 0\}$.

La partie (i) du sous-lemme se démontre en prenant $\ell = k - (p + 1)$, et la partie (ii) en prenant $\ell = k - 2(p + 1)$ et en appliquant θ deux fois. Bien sûr, on pourrait appliquer θ plusieurs fois et obtenir des résultats analogues pour $k \geq 3p$, etc.

Remarquons qu’une preuve locale du sous-lemme s’ensuit de [26], th. 8.6 (avant c’était connu quand $k \leq 2p$ [3, §3.2]). Une preuve globale, plus sophistiquée mais valable en toute généralité, résulte aussi du travail de Kisin sur la conjecture de Breuil–Mézard, au moins si $p > 3$ [22], cor. 2.3.4. \square

Dans certains cas (comme dans le travail de l’un des auteurs sur la conjecture de modularité des surfaces abéliennes), il peut être utile de formuler des conjectures sur l’existence de classes compagnons en cohomologie de de Rham modulo p (et même de classes de de Rham classiques ou p -adiques relevant ces classes) sous des hypothèses de décomposabilité pour $\bar{\rho}|_{I_p}$ moins fortes que la décomposabilité totale. Nous formulons de telles conjectures ci-dessous pour chacun des huit poids compagnons.

5 Décomposabilité partielle et formes compagnons

Soit $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,p} : \Gamma \rightarrow GSp_4(\kappa)$, supposée absolument irréductible, la représentation résiduelle associée à une forme cuspidale holomorphe p -ordinaire f , de poids (k, ℓ) , $k \geq \ell \geq 3$. En particulier, $\bar{\rho}$ est motiviquement impaire. Dans tout ce qui suit, on fait l’hypothèse que $k + \ell - 3 < p - 1$. Soit $k = a + 3$ et $\ell = b + 3$; la représentation $\bar{\rho}$ admet donc le poids de Serre $F(\lambda) = W(\lambda)$ où $\lambda = (a, b; a + b) \in C_0$.

Dans la formulation ci-dessous généralisant la théorie des formes compagnons dans le contexte de la conjecture de Serre pour GL_2/\mathbb{Q} (voir par exemple [14]), on va introduire des twists par des puissances du caractère cyclotomique modulo p de la représentation globale $\bar{\rho}$ et formuler une conjecture d’existence de formes compagnons pour ces twists sous des hypothèses de décomposabilité partielle. On pourrait procéder exactement de la même manière avec la représentation p -adique elle-même et des twists par des puissances du caractère cyclotomique p -adique sous des hypothèses analogues pour la représentation p -adique $\rho_{f,p}|_{D_p}$, mais alors, les formes compagnons dont l’existence est également conjecturée seraient p -adiques (voir [5] pour GL_2/\mathbb{Q}).

Cas 1 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$, qui est toujours motiviquement impaire. On voit qu'après conjugaison par $s_0 = \iota(s_1)$, on a

$$(s_0 \cdot \bar{\rho}_1 \cdot s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-\ell+1} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{2-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (k + p - 1, 4 - \ell + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type holomorphe de paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (a + p - 1, p - 3 - b; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_3 si $a - b > 1$. Remarquons que l'existence de π' n'implique pas tout à fait que $F(\lambda') \in \mathcal{W}(\bar{\rho})$, mais seulement (essentiellement) que $\bar{\rho}^\vee \subset H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\overline{\mathbb{F}}_p))$. Comme $\lambda' \notin C_0$, on a en général $F(\lambda') \subsetneq W(\lambda')$ (voir (5)–(8) ci-dessus).

Nous verrons dans la section suivante comment ceci peut être démontré (les détails paraîtront dans un travail en préparation [32]). Les deux ingrédients-clé sont : le théorème de comparaison étale-cristallin modulo p de Faltings [9], le calcul de la cohomologie de de Rham et de sa filtration de Hodge à l'aide d'un complexe filtré, dit « de Bernstein–Gelfan'd–Gelfan'd dual » introduit par Faltings–Chai [10], qui est quasi-isomorphe au complexe de de Rham logarithmique muni de sa filtration de Hodge. Ce cas 1 est celui qu'a étudié l'un des auteurs dans son étude de la conjecture de Yoshida [35] et [31].

Cas 2 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & 0 & * \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_2 = \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 = \iota(s_1 s_0)$, on a

$$(s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}_2 \cdot s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{\ell-k-1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \omega^{\ell-2} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (\ell - 1 + p - 1, 3 - k + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type Whittaker avec paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (b + p - 2, p - 4 - a; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_2 si $b > 0$.

On conjecture donc que la représentation π' intervient dans le terme gradué de degré $k' - 1$ pour la filtration de Hodge (considéré comme module de Hecke) :

$$\mathrm{gr}^{k'-1} H_{\mathrm{dR}}^3(X/\overline{\mathbb{Z}}_p, \mathcal{V}_{\lambda'}) = H^1(\overline{X}, \omega^{k', 4-\ell'}).$$

Cas 3 : Supposons qu'on ait

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\bar{\rho}_3 = \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 s_0 = \iota(s_1 s_0 s_1)$, on a

$$(s_0 s_1 s_0 \cdot \bar{\rho}_3 \cdot s_0 s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{3-k-\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2-\ell} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $(k', \ell') = (3 - \ell + p - 1, 3 - k + p - 1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; nous conjecturons alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec π'_∞ de type Whittaker avec paramètre de Harish-Chandra $(k' - 1, \ell' - 2; k' + \ell' - 6)$ et telle que

$$\bar{\rho}_{\pi', p} \cong \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}.$$

Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p-4-b, p-4-a; a+b)$ qui est situé dans l'alcôve C_1 si $a+b < p-5$.

On conjecture donc que la représentation π' intervient dans

$$\mathrm{gr}^{\ell'-2} H_{ldR}^3(X/\overline{\mathbb{Z}}_p, \mathcal{V}_{\lambda'}) = H^2(\overline{X}, \omega^{\ell'-1, 3-k'}).$$

Il y a quatre autres cas, pour lesquels on ne prédit pas qu'il existe un relèvement algébrique en caractéristique zéro. La méthode de démonstration que nous proposons ci-dessous pour les quatre premiers poids ne s'applique pas à ces autres cas. Des discussions avec E. Urban et L. Clozel suggèrent que les poids de Serre prédits ci-dessous donnent lieu à des classes c de cohomologie de de Rham modulo p obtenues par réduction de formes compagnons p -adiques ordinaires. La forme des poids suggère en fait que ces classes c pourraient provenir de formes modulaires modulo p , ordinaires, obtenues en multipliant des formes modulo p par un invariant de Hasse partiel de poids $(p-1, 0)$ qui n'a pas de relèvement classique.

Ceci est en accord avec le fait que seuls les quatre représentants de Kostant $w \in W^M$ ont la propriété d'envoyer un poids G dominant sur un poids M -dominant par $\lambda \mapsto w \cdot \lambda$; or les caractères M -dominants $(c, d; e)$ de T sont ceux pour lesquels il existe un entier f tel que $(f+c, f+d; e)$ soit G -dominant. Ces quatre autres cas sont :

Cas 0' : Si

$$\overline{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\overline{\rho}'_0 = \overline{\rho}$ satisfait

$$(s_1 \cdot \overline{\rho}'_0 \cdot s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{\ell-2} & 0 & * \\ 0 & 0 & \omega^{k-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (\ell-1+p-1, k+1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (b+p-2, a+1; a+b)$ qui est situé dans l'alcôve C_2 si $b > 0$.

Cas 1' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & * & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_1 = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$ satisfait

$$(s_1 s_0 \cdot \bar{\rho}'_1 \cdot s_0 s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-\ell+1} & * & 0 & * \\ 0 & \omega^{2-\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{k-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (3 - \ell + p - 1, k + 1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p - 4 - b, a + 1; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_1 si $a > b$.

Cas 2' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_2 = \bar{\rho} \otimes \omega^{1-k}$ satisfait

$$(s_1 s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}'_2 \cdot s_1 s_0 s_1)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{\ell-k-1} & * & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{1-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (2 - k + p - 1, \ell)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (p - 5 - a, b; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_0 .

Cas 3' : Si

$$\bar{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la représentation $\bar{\rho}'_3 = \bar{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}$ satisfait

$$(s_0 s_1 s_0 s_1 \cdot \bar{\rho}'_3 \cdot s_1 s_0 s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{3-k-\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{1-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{2-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $(k', \ell') = (2 - k + 2(p - 1), 4 - l + p - 1)$ avec $k' \geq \ell' \geq 3$. Le poids de Serre correspondant est $F(\lambda')$ pour $\lambda' = (2p - 6 - a, p - 3 - b; a + b)$ qui est situé dans l'alcôve C_3 si $a + b < p - 6$.

6 Complexe BGG dual cohérent

Posons $k = a + 3$ et $\ell = b + 3$, $a \geq b \geq 0$ avec $a + b + 3 < p - 1$ et $\lambda = (a, b; a + b)$ le poids de G associé. Soit X une variété de Shimura pour G de niveau premier à p et net. Soit \mathcal{V}_λ le fibré à connexion associé à la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -représentation de G de plus haut poids λ (voir [27], 1.9 pour l'unicité d'un tel modèle entier sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ lorsque $\lambda \in C_0$, ce qui est le cas ici). Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $G(\mathbb{A})$ intervenant dans $H_{ldR}^3(X, \mathcal{V}_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C}$. Pour que cela se produise, il est nécessaire que la composante à l'infini de π soit l'une des deux séries discrètes $\pi_{\lambda+\rho}^H$ ou $\pi_{\lambda+\rho}^W$ de paramètre de Harish-Chandra $\lambda + \rho = (a + 2, b + 1; a + b)$; π définit alors une forme modulaire de poids (k, ℓ) soit holomorphe soit admettant un modèle de Whittaker. Soit $N \geq 1$, premier à p , un niveau pour $\pi : \pi^{K(N)} \neq 0$. On fixe un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ et un anneau de valuation discrète $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ fini sur \mathbb{Z}_p et contenant les valeurs propres de π pour les opérateurs de Hecke $T_{q,i}$ pour tous les nombres premiers q ne divisant pas le niveau N (on inclut donc $q = p$). On notera ϖ une uniformisante de \mathcal{O} et κ son corps résiduel.

Soit \overline{X} une compactification toroïdale lisse de X sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Le complexe BGG dual pour G est un sous-complexe filtré $\mathcal{K}_\lambda^\bullet$ du complexe de de Rham logarithmique $\mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log)$ sur \overline{X} , constitué de faisceaux localement libres de rang fini. Nous renvoyons à [27] et [25] pour une description détaillée de sa structure entière sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. L'inclusion $\mathcal{K}_\lambda^\bullet \hookrightarrow \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log)$ est un quasi-isomorphisme filtré [25], Sect. 5, Th. 6. Soit $w = a + b + 3$ (le poids motivique de π) ; avec les notations de [31], on peut écrire les termes de ce complexe ; ils sont placés en degré $w, w + 1, w + 2$ et $w + 3$:

$$\omega^{3-\ell, 3-k} \rightarrow \omega^{\ell-1, 3-k} \rightarrow \omega^{k, 4-\ell} \rightarrow \omega^{k, \ell},$$

les morphismes étant des opérateurs différentiels induits par la connexion de Gauss–Manin. De plus, la filtration de Hodge sur le complexe de de Rham induit sur le complexe BGG dual la filtration explicite suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Fil}^0 & = & \omega^{3-\ell, 3-k} & \rightarrow & \omega^{\ell-1, 3-k} & \rightarrow & \omega^{k, 4-\ell} \rightarrow \omega^{k, \ell} \\ \mathrm{Fil}^{\ell-2} & = & 0 & \rightarrow & \omega^{\ell-1, 3-k} & \rightarrow & \omega^{k, 4-\ell} \rightarrow \omega^{k, \ell} \\ \mathrm{Fil}^{k-1} & = & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \omega^{k, 4-\ell} \rightarrow \omega^{k, \ell} \\ \mathrm{Fil}^{k+\ell-3} & = & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \rightarrow \omega^{k, \ell} \end{array}$$

On étend désormais les scalaires de $\mathbb{Z}_{(p)}$ à \mathbb{Z}_p pour tous les objets ci-dessus sans changer les notations. Le quasi-isomorphisme filtré permet donc de calculer les \mathbb{Z}_p -modules gradués non nuls de la filtration de Hodge de H_{ldR}^3 . Ils sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}^0 H_{ldR}^3 &= H^3(\overline{X}, \omega^{3-\ell, 3-k}), & \mathrm{gr}^{\ell-2} H_{ldR}^3 &= H^2(\overline{X}, \omega^{\ell-1, 3-k}), \\ \mathrm{gr}^{k-1} H_{ldR}^3 &= H^1(\overline{X}, \omega^{k, 4-\ell}), & \mathrm{gr}^{k+\ell-3} H_{ldR}^3 &= H^0(\overline{X}, \omega^{k, \ell}). \end{aligned} \quad (20)$$

Les hypothèses de décomposabilité partielle des Cas 1, 2, 3 de la section précédente ont une traduction via le théorème de comparaison étale-cristallin de Faltings [9], en termes de stabilité par le Frobenius cristallin de certains sous-quotients de la filtration de Hodge sur le Φ -module filtré \overline{M}_π associé à la représentation $\overline{\rho}_{\pi,p}$. Par la théorie de Fontaine–Laffaille, on a $\overline{M}_\pi = M_\pi \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ où M_π est le Φ -module filtré, libre de rang 4 sur \mathcal{O} , associé à la représentation $\rho_{\pi,p}$. Soit $P_{f,p}(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$ le polynôme de Hecke en p . Ses racines sont ordonnées pour que $\alpha, \frac{\beta}{p^{\ell-2}}, \frac{\gamma}{p^{k-1}}, \frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ soient des unités p -adiques.

Cas 1 : On suppose que π est donnée par une forme cuspidale holomorphe f ; on considère la forme différentielle $\omega_f \in H^0(\overline{X}, \omega^{k, \ell}) \otimes \mathcal{O}$. Cette forme définit une classe dans $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M_\pi$. En suivant une idée de [11] et [5], on montre qu'un diviseur $Q(X)$ de degré trois, convenablement normalisé, du polynôme de Hecke $P_{f,p}(X)$ (qui est de degré 4) annule l'action de $\Phi/p^{k+\ell-3}$ sur la droite $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} \overline{M}_\pi$. Cette droite est engendrée par la classe de cohomologie de de Rham de $\overline{\omega}_f \in H^0(\overline{X} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa, \omega^{k, \ell})$, réduction modulo p de la forme ω_f . Soit \overline{V} le lieu ordinaire de \overline{X} ; c'est le \mathbb{Z}_p -sous-schéma formel ouvert du complété de \overline{X} le long de la fibre spéciale, défini par la non-annulation modulo p de l'invariant de Hasse H . L'endomorphisme de Frobenius agit sur le \mathbb{Z}_p -schéma formel \overline{V} . On peut donc faire agir $Q(\frac{\Phi}{p^{k+\ell-3}})$ sur la restriction de $\omega_f \in H^0(\overline{X}, \omega^{k, \ell}) \otimes \mathcal{O}$ à \overline{V} ; le résultat $\xi_f = Q(\frac{\Phi}{p^{k+\ell-3}})\omega_f \in H^0(\overline{V}, \omega^{k, \ell}) \otimes \mathcal{O}$ est non-nul modulo p comme on le voit par exemple par examen de son q -développement. Un argument basé sur le fait que le blowing-down V^* de \overline{V} est affine montre alors que la réduction ξ_f de ξ_f modulo p est dans l'image de $\omega^{k, 4-\ell}(\overline{V}) \otimes \kappa \rightarrow \omega^{k, \ell}(\overline{V}) \otimes \kappa$. De plus, la forme antécédente g_1 peut être choisie p -ordinaire et propre pour les opérateurs de Hecke hors de Np ; le degré de l'opérateur différentiel homogène $d : \omega^{k, 4-\ell} \rightarrow \omega^{k, \ell}$ est égal à $\ell - 1$ (voir [32]) ; on trouve donc que les valeurs propres de Hecke de $T_{q,1}$ resp. $T_{q,2}$ sur g_1 sont les $a_{q,1}(f)$ divisés par $q^{\ell-1}$ resp. $a_{q,2}(f)$ divisés par $q^{2(\ell-1)}$. La forme $g = g_1 H$ est de poids (k', ℓ') avec $k' \geq \ell' \geq 3$; par la théorie de Hida, elle se prolonge donc à tout \overline{X} et se relève en caractéristique zéro. La forme classique p -ordinaire obtenue est la forme

compagnon cherchée (voir détails dans [32]). Pour l'instant, les hypothèses précises pour cet argument sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit N un entier sans facteurs carrés et soient k, ℓ deux entiers tels que $k \geq \ell \geq 3$. Soit f une forme cuspidale holomorphe de poids (k, ℓ) de niveau N , propre pour les opérateurs de Hecke $T_{q,1}, T_{q,2}$ (q premier à N). Soit p premier tel que $p-1 > k+\ell-3$, p ne divise pas N , et tel que f est ordinaire en p (voir déf. 3.1). Soit $\rho_{f,p} : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GSp}_4(\mathcal{O})$ la représentation galoisienne p -adique associée et $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,p}$ sa réduction modulo l'idéal maximal (ϖ) de \mathcal{O} . Supposons que*

- 1) *l'image de $\bar{\rho}$ contient $\text{Sp}_4(\kappa')$ pour un corps fini κ' ,*
- 2) *$\bar{\rho}$ est minimalement ramifiée en tout premier divisant N (cf. [13], Sect. 3),*
- 3) *les nombres $\alpha, \frac{\beta}{p^{\ell-2}}, \frac{\gamma}{p^{k-1}}, \frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sont deux à deux distincts dans le corps résiduel,*
- 4) *on est dans le cas 1 pour la restriction de $\bar{\rho}$ à I_p .*

Alors, il existe une forme g cuspidale holomorphe p -ordinaire de poids $(k', \ell') = (p-1+k, p-1+4-\ell)$ propre pour les opérateurs de Hecke $T_{q,1}, T_{q,2}$ (q premier à N) telle que $g|T_{p,1} = b_{p,1} g$ avec $b_{p,1} \equiv \frac{\beta}{p^{\ell-2}} \pmod{\varpi}$, et telle que

$$\bar{\rho}_{g,p} = \bar{\rho}_{f,p} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

Nous espérons relaxer l'hypothèse 1) du théorème dans la version finale de [32].

Nous allons donner deux interprétations de ce théorème dans la direction de la conjecture 1. Posons $a' = k' - 3$, $b' = \ell' - 3$. Considérons le poids $\lambda' = (a', b'; a' + b')$; notons qu'il est p -restreint mais est en général dans l'alcôve C_3 dans laquelle la condition $a' + b' + 3 < p - 1$ n'est pas satisfaite.

Soit K le corps des fractions de \mathcal{O} . Formons les \mathcal{O} -modules $T_1 = H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\mathbb{Z}_p)) \otimes \mathcal{O}$ et

$$T_2 = \text{Im}(H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\mathbb{Z}_p)) \otimes \mathcal{O} \rightarrow H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\mathbb{Z}_p)) \otimes K),$$

le quotient de T_1 par le sous-groupe de ϖ -torsion. On a donc une surjection Γ -linéaire $T_1/\varpi T_1 \rightarrow T_2/\varpi T_2$. La multiplication par ϖ induit une injection Γ -équivariante de $T_1/\varpi T_1$ dans $H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\overline{\mathbb{F}}_p))$.

Par ailleurs, on a une injection Γ -équivariante de $\rho_g^\vee \otimes_{\mathcal{O}} K$ dans $H_{et}^3(X \times \overline{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(K))$.

Notons encore ρ_g^\vee le \mathcal{O} -module $(\rho_g^\vee \otimes_{\mathcal{O}} K) \cap T_2$, facteur direct de T_2 ; sa réduction $\bar{\rho}_g^\vee = \rho_g^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ est alors une sous-représentation de $T_2/\varpi T_2$. Avec les hypothèses du théorème, on obtient donc

Corollaire 6.1. *La contragrédiente de $\bar{\rho}_g = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$ intervient comme sous-quotient irréductible de $H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$. Sous l'hypothèse que $\bar{\rho}_g^\vee$ est un sous- Γ -module de $T_1/\varpi T_1$, on peut même conclure que $\bar{\rho}_g^\vee$ est une sous-représentation de $H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$.*

Corollaire 6.2. *La contragrédiente de $\bar{\rho}_g = \bar{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$ intervient comme sous-quotient irréductible de $H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$. Sous l'hypothèse*

$$\bar{\rho}_g^\vee \text{ est un sous-}\Gamma\text{-module de } T_1/\varpi T_1, \quad (\mathbf{H}_{\mathbf{g}, \mathbf{p}})$$

on peut même conclure que $\bar{\rho}_g^\vee$ est une sous-représentation de $H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$.

Considérons la \mathcal{O} -algèbre de Hecke abstraite $\mathcal{H}^{Np} = (\bigotimes_{(q, Np)=1} \mathcal{H}_q) \otimes \mathcal{O}$. Cette algèbre de Hecke opère par correspondances algébriques sur les \mathcal{O} -modules T_i , $i = 1, 2$, et $T_1 \rightarrow T_2$ est $\mathcal{H}^{Np}[\Gamma]$ -linéaire. Soit \mathfrak{m}' l'idéal maximal de \mathcal{H}^{Np} associé aux valeurs propres de g modulo ϖ . La condition $(\mathbf{H}_{\mathbf{g}, \mathbf{p}})$ est satisfaite si la localisation $T_{1, \mathfrak{m}'} = T_1 \otimes_{\mathcal{H}^{Np}} \mathcal{H}_{\mathfrak{m}'}^{Np}$ du \mathcal{H}^{Np} -module T_1 est sans ϖ -torsion. En effet, la surjection naturelle $T_1 \rightarrow T_2$ induit alors un isomorphisme $(T_1/\varpi T_1)_{\mathfrak{m}'} \cong (T_2/\varpi T_2)_{\mathfrak{m}'}$, ce qui fournit des inclusions de Γ -modules $\bar{\rho}_g^\vee \subset (T_1/\varpi T_1)_{\mathfrak{m}'} \subset H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, V_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$.

Il resterait pour établir la conjecture 1 pour le poids de Serre $F(\lambda')$ à montrer que $\bar{\rho}_g^\vee$ est en fait contenue dans $H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}, F_{\lambda'}(\bar{\mathbb{F}}_p))$. Nous espérons revenir sur cette question ultérieurement.

D'autre part, même si on ne peut appliquer telle quelle la théorie du complexe BGG sur \mathbb{Z}_p pour donner la décomposition de Hodge du \mathbb{Z}_p -module filtré $H_{ldR}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'})$ comme dans [25], cette théorie est valide après extension des scalaires à \mathbb{Q}_p (voir [10], Chap. VI, th. 6.2). En appliquant la flèche

$$H^0(\bar{X}, \omega^{k', \ell'}) \otimes K \rightarrow H_{ldR}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes K,$$

on associe à la forme différentielle ω_g une classe de cohomologie de de Rham c_g dans $H_{ldR}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes K$. On peut interpréter cette cohomologie comme la cohomologie (log-)cristalline de X/\mathbb{F}_p à coefficients dans le (log-)isocristal $\mathcal{V}_{\lambda'}/\mathbb{Q}_p$, et on peut appliquer le théorème de comparaison de Faltings. On trouve en appliquant le foncteur D_{cris} covariant de Fontaine :

$$D_{cris}(H_{et}^3(X \times \bar{\mathbb{Q}}_p, V_{\lambda}(K))) = H_{lcris}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} K.$$

En posant $D_{cris}(\rho_g^\vee|_{D_p} \otimes_{\mathcal{O}} K) = M_{g, K}$, on obtient un sous- Φ -module filtré $M_{g, K}$ de dimension 4 sur K de $H_{lcris}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes K$.

Formons les \mathcal{O} -modules $L_1 = H_{lcris}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ et

$$L_2 = \text{Im}(H_{lcris}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \rightarrow H_{lcris}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} K).$$

L'idéal \mathfrak{m}' étant défini comme ci-dessus, faisons l'hypothèse que la \mathfrak{m}' -composante $L_{1,\mathfrak{m}'} = L_1 \otimes_{\mathcal{H}^{Np}} \mathcal{H}_{\mathfrak{m}'}^{Np}$ du \mathcal{O} -module L_1 est sans torsion. La surjection naturelle $L_1 \rightarrow L_2$ induit donc des isomorphismes $L_{1,\mathfrak{m}'} \cong L_{2,\mathfrak{m}'}$ resp. $(L_1/\varpi L_1)_{\mathfrak{m}'} \cong (L_2/\varpi L_2)_{\mathfrak{m}'}$. Soient $L_{\mathfrak{m}'}$ resp. $\overline{L}_{\mathfrak{m}'}$ ces modules.

Posons $M_g = M_{g,K} \cap L_2$ et $\overline{M}_g = M_g/\varpi M_g$; $\overline{L}_{\mathfrak{m}'}$ est encore un Φ -module filtré et \overline{M}_g est un sous- Φ -module filtré de $\overline{L}_{\mathfrak{m}'}$. La multiplication par ϖ induit une injection $\overline{L}_{\mathfrak{m}'} \hookrightarrow H_{\text{cris}}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$; par cette application, l'image de \overline{M}_g fournit un Φ -sous-module filtré qui contient la classe \overline{c}_g obtenue par réduction du vecteur primitif de $L_{\mathfrak{m}'}$ associé à c_g . Ainsi,

Corollaire 6.3. *Sous l'hypothèse que $L_{1,\mathfrak{m}'}$ n'a pas de ϖ -torsion, il existe un Φ -sous-module filtré \overline{M}_g de $H_{\text{cris}}^3(X, \mathcal{V}_{\lambda'}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \kappa$, de dimension 4 sur κ et tel que la droite $\text{Fil}^{k'+\ell'-3}\overline{M}_g$ est engendrée par une classe \overline{c}_g propre pour les opérateurs de Hecke $T_{q,i}$ pour $i = 0, 1, 2$ et q premier ne divisant pas Np et telle que pour tout nombre premier q ne divisant pas Np , le polynôme de Hecke $P_{\overline{c}_g,q}(X)$ associé à ces valeurs propres est le polynôme caractéristique du Frobenius géométrique Fr_q dans la contragrédiente de $\overline{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$.*

Sans l'information de l'existence de g en caractéristique zéro, on ne pourrait pas déduire du premier corollaire le second car la condition $a' + b' + 3 \geq p - 1$ ne permet pas d'utiliser le théorème de comparaison modulo p de Faltings entre la cohomologie étale et la cohomologie log-cristalline.

Cas 2 : On suppose que $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ avec $\pi_\infty = \pi_{\lambda+\rho}^W$, de sorte que $H^{1,2}(\mathfrak{g}, C_\infty; V_\lambda \otimes \pi_\infty)$ est de dimension 1 (avec $C_\infty = K_\infty Z_\infty \subset G_\infty$). Un théorème de M. Harris [15] et la décomposition de Hodge (20) permettent d'en déduire qu'il existe une classe de cohomologie $\eta_\pi \in H^1(\overline{X}, \omega^{k,4-\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C}$ propre avec les mêmes valeurs propres de Hecke (hors du niveau N) et un module filtré M_π de rang 4 tel que η_π intervienne dans $\text{gr}^{k-1} M_\pi$. A l'aide du théorème de comparaison modulo p , on peut facilement traduire l'hypothèse de décomposabilité partielle de $\overline{\rho}|_{I_p}$ en termes du Φ -module filtré $\overline{M}_\pi = M_\pi/\varpi M_\pi$. On obtient en fait l'existence d'un autre diviseur $R(X)$ de degré trois du polynôme de Hecke $P_{\pi,p}(X)$ de degré quatre qui, appliqué au Frobenius Φ , annule la classe de cohomologie de de Rham de $\overline{\eta}_\pi$ dans un quotient convenable de $H_{\text{dR}}^3(X \times \mathbb{F}_p, \mathcal{V}_\lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} \kappa$.

On espère procéder ensuite de manière analogue par restriction à l'ouvert ordinaire \overline{V} de η_π pour montrer que l'image par $R(\Phi)$ d'un représentant de Čech $(\eta_{ij})_{ij}$ de η_π est non-nulle modulo ϖ mais « est » dans l'image de $\omega^{\ell-1,3-k}(\overline{V} \cap U_{ij}) \rightarrow \omega^{k,4-\ell}(\overline{V} \cap U_{ij})$. Comme on travaille dans un H^1 , avant de pouvoir appliquer cet argument de restriction au lieu ordinaire, il faut

d'abord prendre un recouvrement affine de Čech (U_i) de X , satisfaisant plusieurs conditions (telles que la stabilité par l'endomorphisme de Frobenius), ce qui complique la situation, de sorte que les vérifications sont loin d'être faites. La forme antécédente pourrait être choisie propre et p -ordinaire. Une fois son poids rendu cohomologique (en la multipliant par l'invariant de Hasse), elle devrait se prolonger à tout \overline{X} et se relever en caractéristique nulle. La forme ainsi obtenue serait la forme compagnon cherchée.

Cas 3 : On suppose comme dans le cas 2 que π est de type à l'infini $\pi_{\lambda+\rho}^W$, et on considère une classe de cohomologie $\psi_\pi \in H^2(\overline{X}, \omega^{\ell-1, 3-k}) \otimes \mathbb{C}$ associée. Cette forme définit une classe dans $\mathrm{gr}^{\ell-2} M_\pi$. De nouveau, à l'aide du théorème de comparaison modulo p , on peut facilement traduire l'hypothèse de décomposabilité partielle de $\overline{\rho}|_{I_p}$ en termes du Φ -module filtré \overline{M}_π obtenant ainsi l'existence d'un diviseur $S(X)$ de degré trois du polynôme de Hecke $P_{\pi,p}(X)$ qui, appliqué au Frobenius Φ , annule la classe de cohomologie de de Rham de $\overline{\psi}_\pi$ dans un quotient convenable de $H_{\mathrm{dR}}^3(X \times \mathbb{F}_p, \mathcal{V}_\lambda) \otimes_{\mathbb{F}_p} \kappa$.

On devrait ensuite pouvoir suivre la même stratégie en restreignant les $S(\Phi)(\psi_{ijk})$ à \overline{V} pour montrer que ce système est dans l'image de $\omega^{3-\ell, 3-k}(\overline{V} \cap U_{ijk}) \rightarrow \omega^{\ell-1, 3-k}(\overline{V} \cap U_{ijk})$. Ici, on doit travailler avec un H^2 , de sorte que les remarques sur les difficultés à réaliser plusieurs étapes s'appliquent *a fortiori*. De nouveau, la forme antécédente pourrait être choisie propre et p -ordinaire. Une fois son poids rendu cohomologique en la multipliant par l'invariant de Hasse, elle devrait se prolonger à tout \overline{X} et se relever en caractéristique nulle. La forme obtenue serait alors la forme compagnon cherchée.

Références

- [1] A. Ash, D. Doud, D. Pollack : *Galois representations with conjectural connections to arithmetic cohomology*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 521–579.
- [2] A. Ash, G. Stevens : *Modular forms in characteristic l and special values of their L -functions*, Duke Math. J. 53 (1986), no. 3, 849–868.
- [3] L. Berger : *Représentations modulaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2*, prépublication.
- [4] I.N. Bernstein, I.M. Gelfan'd, S.I. Gelfan'd : *Differential operators on the base affine space, and a study of \mathfrak{g} -modules*, in Lie Groups and Their Representations, ed. I.M. Gelfan'd, Conf. Budapest 1971, Adam Hilger Publ., 1975.

- [5] C. Breuil, M. Emerton : *Représentations p -adiques ordinaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global*, à paraître dans Astérisque.
- [6] K. Buzzard, F. Diamond, A.F. Jarvis : *On Serre's conjecture for mod l Galois representations over totally real fields*, prépublication. Version du 13/10/2008.
- [7] P. Deligne, G. Lusztig : *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2), 103(1) :103–161, 1976.
- [8] M. Demazure, P. Gabriel : *Groupes algébriques*, tome 1, Masson et Cie, Editeurs, North-Holland Publishing Co., 1970.
- [9] G. Faltings : *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (Baltimore MD 1988), 25–80, Johns Hopkins University Press, 1989.
- [10] G. Faltings, C.-L. Chai : *Degeneration of abelian varieties*, Erg. der Math. u. ihre Grenzgebiete, Springer Verlag 1990.
- [11] G. Faltings, B. Jordan : *Crystalline cohomology and $GL(2, \mathbb{Q})$* , Isr. J. Math. 90, 1–66, 1995.
- [12] T. Gee : *Automorphic lifts of prescribed types*, prépublication. Version du 10/10/2008.
- [13] A. Genestier, J. Tilouine : *Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4* , in Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp. 177–290, 2005.
- [14] B. Gross : *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod. p)*, Duke Math. J. 61 (1990), 445–517.
- [15] M. Harris : *Automorphic forms of $\overline{\partial}$ -cohomology type as coherent cohomology classes*, J. Differential Geom. 32 (1990), no. 1, 1–63.
- [16] F. Herzig : *The weight in a Serre-type conjecture for tame n -dimensional Galois representations*, soumis.
- [17] H. Hida : *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*. J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 1, 1–76.
- [18] J.C. Jantzen : *Darstellungen halbeinfacher Gruppen und kontravariante Formen*, J. Reine Angew. Math. 290 (1977), 117–141.
- [19] J.C. Jantzen : *Representations of algebraic groups*, Academic Press 1987.
- [20] J.C. Jantzen : *Deligne-Lusztig modulo p : revisited*, correspondance personnelle, 2005.
- [21] B.W. Jordan, R. Livné : *Integral Hodge Theory and congruences between modular forms*, Duke Math. J. 80 (1995), 419–484.

- [22] M. Kisin : *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2* , prépublication.
- [23] G. Laumon : *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois*, in *Formes Automorphes (II)*, le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp. 1–66, 2005.
- [24] T. Miyake : *Modular forms*, Springer-Verlag 1989.
- [25] A. Mokrane, J. Tilouine : *Cohomology of Siegel varieties with p -adic integral coefficients and applications*, pp. 1–95 (2002), Astérisque 280, Publ. Soc. Math. France.
- [26] V. Paškūnas, *Admissible unitary completions of locally \mathbb{Q}_p -rational representations of $GL_2(F)$* , prépublication.
- [27] A. Polo, J. Tilouine : *Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over $\mathbb{Z}_{(p)}$ for representations with p -small weights*, pp. 97–135 (2002), Astérisque 280, Publ. Soc. Math. France.
- [28] J.-P. Serre : *Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 179–230.
- [29] R. Taylor : *On the ℓ -adic cohomology of Siegel threefolds*, Inv. Math. 114 (1993), 289–310.
- [30] J. Tilouine : *Deformations of Galois representations*, AMS 1996.
- [31] J. Tilouine : *Nearly ordinary degree four symplectic Galois representations and p -adic Siegel modular forms*, Comp. Math., vol.142, 1122–1156, 2006.
- [32] J. Tilouine : *Formes compagnons et complexe BGG dual pour $GSp_4(\mathbb{Q})$* , en préparation.
- [33] E. Urban : *Sur les représentations p -adiques associées aux représentations cuspidales de $GSp_4(\mathbb{Q})$* , in *Formes Automorphes (II)*, le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp. 151–176, 2005.
- [34] R. Weissauer : *Four dimensional Galois representations*, in *Formes Automorphes (II)*, le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp. 67–150, 2005.
- [35] H. Yoshida : *Siegel’s Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms*, Inv. Math. 60, 193–248 (1980).
- [36] H. Yoshida : *On generalizations of the Shimura-Taniyama conjecture*, prépublication.

F. Herzig, Department of Mathematics, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston, IL 60208-2730. États-Unis.

herzig@math.northwestern.edu

J. Tilouine, Département de Mathématiques, UMR 7539, Institut Galilée, Université
de Paris 13, 93430 Villetaneuse. France.
`tilouine@math.univ-paris13.fr`